Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie | **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 4 | **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Ellipse. **(4 Punkte)**

Gegeben sei eine *Ellipse* mit den Halbachsen $a \geq b > 0$ und der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(a \cos t, b \sin t, 0\big) .$$

(a) Bestimmen Sie das Frenet-Dreibein von x.

(b) Die *Evolute* einer regulären ebenen Kurve $x : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist definiert als die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte. Sie kann parametrisiert werden durch

$$m : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto m(t) := x(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t) . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Evolute der Ellipse und bestimmen Sie diejenigen Punkte, in denen die Evolute nicht regulär ist.

Aufgabe 2. Kettenlinie und Traktrix. **(4 Punkte)**

Die *Evolvente* einer regulären ebenen Kurve $x : I \to \mathbb{R}^3$ bezüglich des Referenzpunktes $x(t_0)$, $t_0 \in I$, ist die durch

$$e_{t_0} : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto e_{t_0}(t) := x(t) - s_{t_0}(t) \cdot T(t)$$

parametrisierte Kurve. Dabei sei $s_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} |x'(u)| du$ die Bogenlängenfunktion.

(a) Bestimmen Sie die Evolvente e_0 der durch $x : [-8, 8] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, \cosh t, 0)$ parametrisierten Kettenlinie bezüglich des Referenzpunktes $x(0)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel (1) die Evolute m der Traktrix

$$x : (0, 8) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \Big(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\Big) .$$

Aufgabe 3. Sattelfläche. **(4 Punkte)**

Wir betrachten das parametrisierte Flächenstück

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ u = (u^1, u^2) \mapsto \big(u^1 - u^2, u^1 + u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2\big) .$$

(a) Skizzieren Sie die Fläche und bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix $J_x(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Parameterlinien und überprüfen Sie, ob die Parameterlinien ebene Kurven sind.

(c) Berechnen Sie die Krümmung der Parameterlinien und geben Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Krümmung an.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 16.11.2009 in der Übung.