Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 5 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Elliptisches Paraboloid. **(4 Punkte)**

Gegeben sei das *elliptische Paraboloid* mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, (u^2)^2).$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Jacobimatrix in jedem Punkt der Fläche.

(b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion aller Parameterlinien.

(c) Zeigen Sie, dass je zwei u^2-Parameterlinien durch eine euklidische Bewegung ineinander übergeführt werden können. Gilt dies auch für die u^1-Parameterlinien?

Aufgabe 2. Loxodrome. **(4 Punkte)**

Wir betrachten die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\sin u^2 \cos u^1, \sin u^2 \sin u^1, \cos u^2)$$

und darauf eine *Loxodrome*, die gegeben ist durch

$$c : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(u^1(t), u^2(t)) \quad \text{mit} \quad u^1(t) = \log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right),\ u^2(t) = \frac{\pi}{2} - t\,.$$

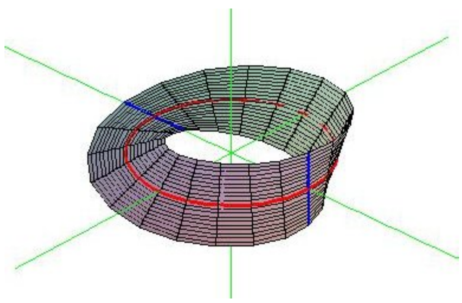
(a) Berechnen Sie die Länge dieser Flächenkurve.

(b) Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Raumkurven ist definiert als der Winkel zwischen den beiden Tangenten im Schnittpunkt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Kurve c und den Breitenkreisen $u^2 = const$.

Aufgabe 3. Möbiusband. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die als *Möbiusband* bekannte Fläche mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R}^3, \\ (u^1, u^2) &\mapsto \left(\cos u^1 + u^2 \sin\frac{u^1}{2}\cos u^1, \sin u^1 + u^2 \sin\frac{u^1}{2}\sin u^1, u^2\cos\frac{u^1}{2}\right). \end{aligned}$$



(a) Berechnen Sie in jedem Punkt der Fläche den Vektor $n := x_{u^1} \times x_{u^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $x(u^1 + 2\pi, 0) = x(u^1, 0)$ und $n(u^1 + 2\pi, 0) = -n(u^1, 0) \quad \forall u^1 \in \mathbb{R}$.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 23.11.2009 in der Übung.