Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

**Differentialgeometrie** **Fachrichtung Geodäsie**

**Übungsblatt 6** **Wintersemester 2009/10**

---

**Aufgabe 1. Regelfläche.** **(4 Punkte)**

Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (\cos u^1 - u^2 \sin u^1, \sin u^1 + u^2 \cos u^1, u^2).$$

(a) Finden Sie eine implizite Darstellung dieser Fläche, indem Sie die Parameter $u^1$ und $u^2$ eliminieren.

(b) Skizzieren Sie die Fläche und berechnen Sie die Krümmung der $u^2$-Parameterlinien.

(c) Zeigen Sie, dass es durch jeden Punkt der Fläche eine Gerade gibt, die ganz auf der Fläche liegt. Eine Fläche mit dieser Eigenschaft nennt man *Regelfläche*.

**Aufgabe 2. Drehflächen.** **(4 Punkte)**

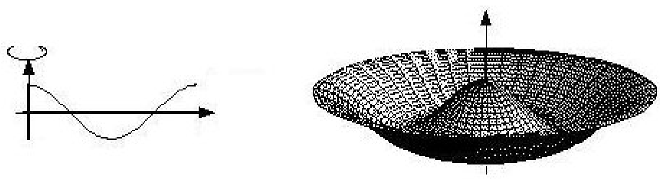
Eine *Drehfläche* entsteht, indem man eine ebene Kurve um eine Achse dreht. Im Folgenden betrachten wir eine differenzierbare Kurve

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto c(t) = (c_1(t), 0, c_3(t)),$$

in der $(x_1, x_3)$-Ebene und drehen diese um die $x_3$-Achse. Die hierdurch konstruierte Fläche besitzt dann eine Parametrisierung der Form

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2)) .$$

Zeigen Sie, dass diese Parametrisierung regulär ist, falls die Kurve $c$ regulär ist und $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.



Drehfläche der Kurve $c(t) = (t, 0, \cos t)$

**Aufgabe 3. Einschaliges Hyperboloid.** **(4 Punkte)**

(a) Begründen Sie, dass die Menge $\mathcal{F} := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ die Spur eines regulär parametrisierten Flächenstücks ist und skizzieren Sie die Fläche.

(b) Finden Sie eine Parametrisierung $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Fläche $\mathcal{F}$ als Drehfläche (vgl. Aufgabe 2) und geben Sie die zugehörigen Parameterlinien an. Interpretieren Sie die Parameterlinien geometrisch.

(c) Berechnen Sie für alle $u \in U$ den Vektor $x_{u^1}(u) \times x_{u^2}(u)$.

---

**Abgabe** der Lösungen bis **Montag**, den 30.11.2009 in der Übung.