Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Explizite Flächendarstellung. **(4 Punkte)**

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Der Graph von f ist die Menge

$$\mathcal{F} := \{(u^1, u^2, f(u^1, u^2)) \in \mathbb{R}^3 : \, (u^1, u^2) \in U\} \,.$$

Dieses Flächenstück kann parametrisiert werden durch

$$x : U \to \mathbb{R}^3, \; (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

(vgl. explizite Kurvendarstellung in Aufgabe 2 auf Übungsblatt 4).

(a) Zeigen Sie, dass die Fläche x regulär ist und bestimmen Sie ein Gauß'sches begleitendes Dreibein.

(b) Berechnen Sie die ersten Fundamentalgrößen von x.

Aufgabe 2. Verschiedene Flächen. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Flächen alle regulären Punkte und berechnen Sie in diesen die ersten Fundamentalgrößen.

(a) *Ebene in Polarkoordinaten:*

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, 0)$$

(b) *Verallgemeinerter Kegel* mit Leitkurve $\ell : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto \ell(t) = (\sin(2t), \sin t, 1)$:

$$x : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; (u^1, u^2) \mapsto u^2 \ell(u^1)$$

(c) *Tangentenfläche* einer Helix $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$:

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; (u^1, u^2) \mapsto c(u^1) + u^2 \dot{c}(u^1)$$

Aufgabe 3. Drehflächen. **(4 Punkte)**

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3, \; (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche, die durch Drehung der Kurve c um die x_3-Achse entsteht (vgl. Aufgabe 2 auf Übungsblatt 6).

(a) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der Drehfläche x.

(b) Berechnen Sie hiermit die ersten Fundamentalgrößen des einschaligen Hyperboloids mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cosh u^2 \cos u^1, \cosh u^2 \sin u^1, \sinh u^2).$$

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 14.12.2009 in der Übung.