Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

**Differentialgeometrie** **Fachrichtung Geodäsie**

**Übungsblatt 9** **Wintersemester 2009/10**

---

**Aufgabe 1. Satz von Pappus.** **(4 Punkte)**

Nun sei $c : (0, L) \to \mathbb{R}^3$, $c(s) := (c_1(s), 0, c_3(s))$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte* Kurve mit $c_1(s) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times (0, L) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche $\mathcal{F}$, die entsteht, wenn die Kurve $c$ um die $x_3$-Achse gedreht wird.

(a) Für $s \in (0, L)$ sei $\rho(s)$ der Abstand von $c(s)$ zur $x_3$-Achse. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_0^L \rho(s)\, ds.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rotationstorus' ($0 < r < a$)

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1(a + r\cos u^2), \sin u^1(a + r\cos u^2), r\sin u^2).$$

**Aufgabe 2. Flächeninhalte.** **(4 Punkte)**

Berechnen Sie für $T > 0$ den Flächeninhalt folgender Flächenstücke.

(a) Kegelstück

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(b) Elliptisches Paraboloid der Höhe $T$

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(c) Teil der Sattelfläche

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2,\ x_1^2 + x_2^2 < T\}$$

**Aufgabe 3. Zweite Fundamentalform von Drehflächen.** **(4 Punkte)**

(a) Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$. Bestimmen Sie die zweiten Fundamentalgrößen der Drehfläche

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

(b) Parametrisieren Sie die Sphäre vom Radius $r > 0$ als Drehfläche und berechnen Sie ihre zweite Fundamentalform. Geben Sie außerdem ihre Normalkrümmung in jedem Punkt an.

---

**Abgabe** der Lösungen bis **Montag**, den 21.12.2009 in der Vorlesung.