Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Lösung zu Übungsblatt 9 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 2. Flächeninhalte.

Berechnen Sie für $T > 0$ den Flächeninhalt folgender Flächenstücke.

(a) Kegelstück

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(b) Elliptisches Paraboloid der Höhe T

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(c) Teil der Sattelfläche

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2,\ x_1^2 + x_2^2 < T\}$$

Lösung:

(a) Eine Parametrisierung des gegebenen Kegelstückes als Drehfläche bietet sich an:

$$x : [0, 2\pi] \times (0, T) \to \mathbb{R}^3,\ x(u^1, u^2) = (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), u^2).$$

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 (a) von Übungsblatt 8 erhalten wir sofort

$$g_{11} = (u^2)^2\,, \quad g_{12} = g_{21} = 0\,, \quad g_{22} = 2\,, \quad g = \det(g_{ij}) = 2(u^2)^2,$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \int_0^T \int_0^{2\pi} \sqrt{2(u^2)^2}\, du^1 du^2 = 2\pi\sqrt{2} \int_0^T u^2\, du^2 = \sqrt{2}\pi\, T^2.$$

(b) Auch das elliptische Paraboloid der Höhe T parametrisieren wir als Drehfläche

$$x : [0, 2\pi] \times (0, \sqrt{T}) \to \mathbb{R}^3,\ x(u^1, u^2) = (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), (u^2)^2).$$

$$x_{u^1}(u^1, u^2) = (-u^2 \sin(u^1), u^2 \cos(u^1), 0), \quad x_{u^2}(u^1, u^2) = (\cos(u^1), \sin(u^1), 2u^2),$$

$$g_{11} = (u^2)^2\,, \quad g_{12} = g_{21} = 0\,, \quad g_{22} = 1 + 4(u^2)^2\,, \quad g = \det(g_{ij}) = (u^2)^2 \left(1 + 4(u^2)^2\right),$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \int_0^{\sqrt{T}} \int_0^{2\pi} u^2 \sqrt{1 + 4(u^2)^2}\, du^1 du^2 = 2\pi \int_0^{\sqrt{T}} u^2 \sqrt{1 + 4(u^2)^2}\, du^2$$

Mit der Substitution $v := 1 + 4(u^2)^2 \Rightarrow \frac{dv}{du^2} = 8u^2$
ist die neue untere Grenze 1, die neue obere Grenze $1 + 4T$, also

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \frac{\pi}{4} \int_1^{1+4T} \sqrt{v}\, dv = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) \Bigg|_1^{1+4T} = \frac{\pi}{6} \left((1 + 4T)^{3/2} - 1 \right)$$

(c) Wir parametrisieren die Sattelfläche durch

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1u^2).$$

$$x_{u^1}(u^1, u^2) = (1, 0, u^2), \quad x_{u^2}(u^1, u^2) = (0, 1, u^1),$$

$$g_{11} = 1+(u^2)^2, \quad g_{12} = g_{21} = u^1u^2, \quad g_{22} = 1+(u^1)^2, \quad g = \det(g_{ij}) = 1+(u^1)^2+(u^2)^2.$$

Das Integral $\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \int \sqrt{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}\, dA$ lässt sich durch Verwendung von Polarkoordinaten lösen. Mit $u^1 = r\cos\varphi$ und $u^2 = r\sin\varphi$ folgt

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \int_0^{\sqrt{T}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2}\, r d\phi dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{T}} r\sqrt{1+r^2}\, dr.$$

Substituiert man nun $v = 1 + r^2 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = 2r$,
so erhält man mit den neuen Grenzen 1 und $1 + T$

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_T) = \pi \int_1^{1+T} \sqrt{v}\, dv = \pi \left(\frac{2}{3} v^{3/2}\right)\Bigg|_1^{1+T} = \frac{2\pi}{3}\Big((1+T)^{3/2} - 1\Big).$$

Aufgabe 3. Zweite Fundamentalform von Drehflächen.

(a) Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$. Bestimmen Sie die zweiten Fundamentalgrößen der Drehfläche

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

(b) Parametrisieren Sie die Sphäre vom Radius $r > 0$ als Drehfläche und berechnen Sie ihre zweite Fundamentalform. Geben Sie außerdem ihre Normalkrümmung in jedem Punkt an.

Lösung:

(a) Wir erinnern uns (vgl. Aufgabe 2 auf Blatt 6) dass

$$\begin{aligned}
x_{u^1}(u^1, u^2) &= (-c_1(u^2)\sin u^1, c_1(u^2)\cos u^1, 0),\\
x_{u^2}(u^1, u^2) &= (c_1'(u^2)\cos u^1, c_1'(u^2)\sin u^1, c_3'(u^2)),\\
n(u^1, u^2) &= \frac{1}{|c'(u^2)|}\big(c_3'(u^2)\cos u^1, c_3'(u^2)\sin u^1, -c_1'(u^2)\big).
\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
x_{u^1u^1}(u^1, u^2) &= (-c_1(u^2)\cos u^1, -c_1(u^2)\sin u^1, 0),\\
x_{u^1u^2}(u^1, u^2) &= (-c_1'(u^2)\sin u^1, c_1'(u^2)\cos u^1, 0),\\
x_{u^2u^2}(u^1, u^2) &= (c_1''(u^2)\cos u^1, c_1''(u^2)\sin u^1, c_3''(u^2)),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \langle x_{u^1u^1}, n\rangle = \frac{1}{|c'(u^2)|}\big(-c_1(u^2)c_3'(u^2)\big),\\
b_{12} &= \langle x_{u^1u^2}, n\rangle = \frac{1}{|c'(u^2)|}\cdot 0 = 0 = b_{21},\\
b_{22} &= \langle x_{u^2u^2}, n\rangle = \frac{1}{|c'(u^2)|}\big(c_1''(u^2)c_3'(u^2) - c_1'(u^2)c_3''(u^2)\big).
\end{aligned}$$

(b) Die Sphäre vom Radius $r > 0$ kann parametrisiert werden als Drehfläche der Kurve

$$c : (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto c(t) = (r \sin t, 0, r \cos t).$$

Es ist

$$\begin{aligned} c'(t) &= (r\cos t, 0, -r\sin t), \quad |c'(t)| = r, \\ c''(t) &= (-r\sin t, 0, -r\cos t). \end{aligned}$$

Damit folgt für die Sphäre vom Radius $r > 0$ als Drehfläche

$$x : [0, 2\pi) \times (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^3, \; x(u^1, u^2) = (r\cos u^1 \sin u^2, r \sin u^1 \sin u^2, r\cos u^2)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{|c'(u^2)|}\big(- c_1(u^2) c_3'(u^2)\big) = \frac{1}{r} \cdot (-r\sin u^2) \cdot (-r \sin u^2) = r\sin^2 u^2, \\ b_{12} &= 0 = b_{21}, \\ b_{22} &= \frac{1}{|c'(u^2)|}\big(c_1''(u^2)c_3'(u^2) - c_1'(u^2)c_3''(u^2)\big) \\ &= \frac{1}{r}\big(- r\sin u^2 \cdot (-r\sin u^2) - r\cos u^2 \cdot (-r\cos u^2)\big) = r. \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die ersten Fundamentalgrössen von x gegeben sind durch

$$\begin{aligned} g_{11} &= r^2 \sin^2 u^2 = r b_{11}, \\ g_{12} &= 0 = g_{12}, \\ g_{22} &= r^2 = r b_{22}. \end{aligned}$$

Ist also $u_0 \in [0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$, und $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$ ein in u_0 angehefteter Richtungsvektor mit

$$1 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\xi^i\xi^j = g_{11}(\xi^1)^2 + g_{22}(\xi^2)^2 = r b_{11}(\xi^1)^2 + r b_{22}(\xi^2)^2,$$

so gilt für die Normalkrümmung im Punkt $x_0 = x(u_0)$ in Richtung $x_\xi = \xi^1 x_{u^1} + \xi^2 x_{u^2}$

$$\kappa_n(x_\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\xi^i\xi^j = b_{11}(\xi^1)^2 + b_{22}(\xi^2)^2 = \frac{1}{r}.$$

Dies bedeutet, dass in jedem beliebigen Punkt der Sphäre für jede beliebige Richtung die Normalkrümmung konstant $\frac{1}{r}$ ist.