

Aufgabe 1. Rotationstorus. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen des Rotationstorus' ($0 < r < a$)

$$x : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto ((a + r \cos u^2) \cos u^1, (a + r \cos u^2) \sin u^1, r \sin u^2),$$

indem Sie wie in der Vorlesung ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung lösen.

Hinweis: Lassen Sie bei der Rechnung zunächst die ersten und zweiten Fundamentalgrößen als Variable stehen.

Aufgabe 2. Elliptisches Paraboloid. (4 Punkte)

Berechnen Sie wie in Aufgabe 1 die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen des elliptischen Paraboloids mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, (u^2)^2).$$

Aufgabe 3. Katenoid. (4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob das Katenoid, parametrisiert durch

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \cosh u^2, \sin u^1 \cosh u^2, u^2),$$

eine Minimalfläche ist. Berechnen Sie außerdem die Gaußkrümmung.

Aufgabe 4. Wendelfläche. (4 Punkte)

Berechnen Sie für die Wendelfläche mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1), \quad a > 0,$$

die mittlere Krümmung sowie die Hauptkrümmungen.

Aufgabe 5. Sattelfläche. (4 Punkte)

Gegeben sei die Sattelfläche mit den beiden Parametrisierungen

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, & \quad (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1 \cdot u^2), \\ \tilde{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, & \quad (v^1, v^2) \mapsto \tilde{x}(v^1, v^2) = (v^1 + v^2, v^1 - v^2, (v^1)^2 - (v^2)^2). \end{aligned}$$

Berechnen Sie für beide Parametrisierungen die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 6. Elliptische Punkte. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Parametrisierung $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, e^{u^1} + e^{u^2})$ nur elliptische Punkte besitzt. Bestimmen Sie weiter die mittlere Krümmung sowie die Hauptkrümmungen.