Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 11 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Tangentenfläche. **(4 Punkte)**

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto c(s)$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte* Kurve, und

$$x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 \dot{c}(u^1)$$

die zugehörige Tangentenfläche.

(a) Zeigen Sie, dass x genau in den Punkten mit $\ddot{c}(u_1) \neq o$ und $u_2 \neq 0$ regulär ist und berechnen Sie die ersten Fundamentalgrößen von x.

(b) Zeigen Sie, dass in den regulären Punkten von x für den Flächennormalenvektor $n(u^1, u^2)$ von x und die Binormale $B(s)$ der Kurve c folgender Zusammenhang gilt:

$$n(u^1, u^2) = -B(u^1)\,.$$

(c) Verifizieren Sie, dass die Gaußkrümmung von x identisch null ist und berechnen Sie die mittlere Krümmung von x.

(d) Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und zeigen Sie, dass x_{u^2} in jedem Punkt der Fläche eine Hauptkrümmungsrichtung ist.

Aufgabe 2. Hauptkrümmungen. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Fläche $\mathcal{F}$ mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cosh u^1, u^2 \sinh u^1, u^1 + u^2).$$

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen und die Gaußkrümmung der Fläche im Punkt $x(0, 0)$.

Hinweis: Sie benötigen die Fundamentalgrößen nur im Punkt $x(0, 0)$!

Aufgabe 3. Krümmungslinienparameter. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Drehfläche $\mathcal{F}$ mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto ((u^2)^2 \cos u^1, (u^2)^2 \sin u^1, u^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ nur hyperbolische Punkte besitzt.

(b) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen der Fläche.

(c) Überprüfen Sie (unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 1 und 2 des 10. Übungsblattes), dass in jedem Punkt der Fläche die Tangentialvektoren an die Parameterlinien Hauptkrümmungsrichtungen sind.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 18.01.2010 in der Übung.