Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 14 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Christoffelsymbole und Geodätische. **(8 Punkte)**

Gegeben sei das Flächenstück mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cosh u^1 - 1, u^1, 2u^2).$$

(a) Bestimmen Sie alle Christoffelsymbole und geben Sie das System von Differentialgleichungen für Geodätische an.

(b) Zeigen Sie, dass die Parameterlinien Geodätische sind.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $u^2 = f(u^1)$ alle weiteren Geodätischen der Fläche. Hierbei bezeichne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

(d) Zeigen Sie, dass jede Geodätische alle u^2-Parameterlinien im gleichen Winkel schneidet.

(e) Bestimmen Sie die Geodätische durch den Punkt $x(0,0)$, die die u^1-Parameterlinie dort unter dem Winkel θ mit $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ schneidet.

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) \cdot \tanh x$ ist die Funktion $y(x) = \cosh x$.

Aufgabe 2. Clairaut Relation. **(4 Punkte)**

(a) Wir betrachten das Rotationshyperboloid mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cosh u^2 \cos u^1, \cosh u^2 \sin u^1, \sinh u^2).$$

Zeigen Sie, dass die Geodätische durch den Punkt $(\sqrt{2}, 0, 1)$, die mit dem Breitenkreis einen Winkel von $\pi/4$ $(= 45^o)$ bildet, die (x_1, x_2)-Ebene nicht schneiden kann.

(b) Gegeben sei nun die Pseudosphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto \left(\frac{1}{\cosh u^2} \cos u^1, \frac{1}{\cosh u^2} \sin u^1, u^2 - \tanh u^2\right),$$

sowie die Geodätische c durch den Punkt $(1, 0, 0)$, die mit dem Breitenkreis $u^2 = 0$ einen Winkel von $\pi/3$ $(= 60^o)$ bildet. Geben Sie alle Breitenkreise an, die von c geschnitten werden.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 08.02.2010 in der Übung.