Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 1 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Kartesisches Blatt)

Sei $c:]-1,\infty[\to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $c(t) := (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$ mit $a > 0$. Zeigen Sie:

(a) c ist regulär und für $t = 0$ tangential zur x-Achse, ferner $\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{c}(t) = (0, 0)$.

(b) Fertigen Sie eine genaue Skizze oder einen Computer-Plot an.

Aufgabe 2 (Bogenlänge)

Die Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ sei in „Polarkoordinatendarstellung" $c(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t))$ gegeben mit Radiusfunktion r und Winkelfunktion φ.

(a) Stellen Sie die Bogenlänge von c als Ausdruck der Funktionen r und φ (und ggf. ihrer Ableitungen) dar.

(b) Zeichnen oder plotten Sie die archimedische Spirale $c : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t\cos t, t\sin t)$ und berechnen Sie ihre Bogenlänge über dem Intervall $[\pi, 2\pi]$.

Aufgabe 3 (Klothoide)

Die Kurve $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$c(t) := \left(a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau,\ a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau \right)$$

mit $a > 0$ heißt *Klothoide*.

(a) Ist c nach Bogenlänge parametrisiert? Berechnen Sie die Krümmung von c.

(b) Skizzieren oder plotten Sie c. In welcher Beziehung stehen die Bogenlänge und die Krümmung?

(c) Wo und warum wird die Klothoide im Straßenbau verwendet?

Aufgabe 4 (Möbiusband)

Das Möbiusband sei parametrisiert durch $\mu : [0, 4\pi] \times [0, \frac{3}{4}] \to \mathbb{R}^3$,

$$\mu(\theta, r) := \left(\left(1 + r\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + r\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, r\sin\frac{\theta}{2} \right).$$

(a) Fertigen Sie eine genaue Skizze oder einen Computer-Plot an.

(b) Berechnen Sie das Normalenfeld $N(\theta, r) := (\partial_\theta\mu \times \partial_r\mu)(\theta, r)$, wobei ∂_θ und ∂_r die Richtungsableitungen nach θ und r und „$\times$" das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

(c) Welche Beziehung besteht zwischen $\mu(\theta, 0)$ und $\mu(\theta + 2\pi, 0)$ bzw. $N(\theta, 0)$ und $N(\theta + 2\pi, 0)$? Was bedeutet es geometrisch?

Ort und Zeit der Abgabe der Lösungen werden in der Vorlesung oder Übung festgelegt. Jede Aufgabe wird maximal mit 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/