Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 2 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Traktrix)

Die Kurve $\alpha :]0,\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (\cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}), \sin t)$ heißt „Traktrix".

(a) Zeigen Sie, daß jede Tangente der Traktrix die x-Achse schneidet. Ferner zeigen Sie, daß für alle Tangenten die Länge des Segments zwischen dem Berührpunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der x-Achse konstant ist. Warum heißt α „Traktrix"?

(b) Skizzieren oder plotten Sie die Traktrix und berechnen Sie ihre Krümmung.

Aufgabe 2 (Krümmungskreis)

Sei I ein Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\kappa(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$. Bezeichne mit K den Kreis mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$.

Wir sagen, daß *der Kreis K die Kurve α in $t_0 \in I$ mindestens in n-ter Ordnung berührt*, falls für $f(t) := |\alpha(t) - m| - r$ gilt: $f(t_0) = f'(t_0) = \cdots = f^{(n)}(t_0) = 0$.

Sei der Einfachheit halber α nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie:

(a) Für $r := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$ und $m := \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0)$, wobei $n(t_0)$ der Normalenvektor von α bei t_0 ist, berührt K die Kurve α in t_0 mindestens in zweiter Ordnung.

(b) K ist der einzige Kreis, der α in t_0 mindestens in zweiter Ordnung berührt.

Aufgabe 3 (Isometrien des euklidischen Raumes)

Sei $F : (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Isometrie des euklidischen Raumes.

(a) Sei $F(0) = 0$. Berechnen Sie die Ableitung von F.

Hinweis: Geraden werden auf Geraden abgebildet.

(b) Folgern Sie, daß F linear ist.

Aufgabe 4 (Kurven in einer Kugel)

Sei $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, die ganz in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $r > 0$ enthalten ist. Für $t_0 \in]a,b[$ liege $\alpha(t_0)$ auf der Kugeloberfläche.

Zeigen Sie, daß $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{r}$ gilt.

Abgabe: 29.4.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/