Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 3 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Vektorfelder und Flußkurven)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Ein *Vektorfeld (auf U)* ist eine glatte Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^2$. Eine Lösung $z : I \to \mathbb{R}^2$ der Gleichung $\dot{z}(t) = X(z(t))$ heißt *Flußkurve* von X. Zur Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ betrachte die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad \operatorname{grad} H(x,y) := (\partial_x H, \partial_y H)(x,y) \quad \text{(Gradientenfeld)}, \\ X_H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad X_H(x,y) := (\partial_y H, -\partial_x H)(x,y) \quad \text{(Hamiltonsches Vektorfeld)}. \end{aligned}$$

(a) In welcher geometrischen Beziehung stehen $\operatorname{grad} H$ und X_H? Ferner sei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung der *Hamiltonschen Gleichung* $\dot{z}(t) = X_H(z(t))$. Wie verhält sich H längs z?

(b) Berechnen Sie die Flußkurven zu $\operatorname{grad} H$ und X_H. Skizzieren oder plotten Sie die Vektorfelder und ihre Flußkurven.

Aufgabe 2 (Immersionen des Kreises)

Eine *Immersion des Kreises* ist eine (geschlossene) periodische reguläre Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Zwei solche Immersionen α und β heißen *isotop*, falls ein glattes $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ existiert mit $H(\cdot,0) = \alpha$ und $H(\cdot,1) = \beta$, so daß $H(\cdot,t)$ für alle t eine Immersion des Kreises ist.

(a) Finden Sie je zwei Beispiele im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ für Immersionen des Kreises.

(b) Wann sind zwei gegebene Immersionen α und β im $\mathbb{R}^2$ isotop? Finden Sie ein Kriterium.

(c) Wie verhält es sich im $\mathbb{R}^3$?

Abgabe: 06.05.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/