

Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Sommersemester 2008

Aufgabe 1 (Scheitelpunkte)

- Skizzieren oder plotten Sie $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t)$.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Punkte mit vertikalen bzw. horizontalen Tangenten.
- $t_0 \in [a, b]$ heißt *Scheitelpunkt* von $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, falls $\kappa'(t_0) = 0$. Berechnen Sie die Krümmung von c und zeichnen Sie die Scheitelpunkte ein.

Aufgabe 2 (Evolute)

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\kappa_c(t) \neq 0$ für alle t . Die *Evolute* von c ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von c , d.h. die Kurve $t \mapsto c(t) + \frac{1}{\kappa_c(t)}N(t)$, wobei $N(t)$ der Normalenvektor in $c(t)$ ist.

- Zeigen Sie, daß die Evolute nicht von der Durchlaufrichtung von c oder der Orientierung des \mathbb{R}^2 abhängt.
- Berechnen und skizzieren oder plotten Sie die Evolute der Kreises $K(t) = (\cos t, \sin t)$ und der Parabel $c(t) := (t, t^2)$.

Aufgabe 3 (Umlaufzahl für stückweise C^1 -Kurven)

Eine stetige Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit heißt *stückweise C^1* , falls es endlich viele $a \leq t_0 < \dots < t_k \leq b$ gibt, so daß $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ eine C^1 -Kurve ist für $0 \leq i \leq k - 1$.

- Wie läßt sich die Umlaufzahl für geschlossene, stückweise C^1 -Kurven definieren? *Hinweis:* Beachten Sie die anliegenden Außenwinkel.
- Zeigen Sie, daß für geschlossene c die Umlaufzahl Werte in \mathbb{Z} annimmt. *Hinweis:* Glätten Sie die Ecken.

Aufgabe 4 (Umlaufzahl in der Funktionentheorie)

In der Funktionentheorie wird für eine geschlossene Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ die *Umlaufzahl von γ um p* definiert als

$$U_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz.$$

Zeigen Sie $U_0(\dot{c}) = n(c)$, wobei $n(c)$ die in der Vorlesung definierten Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve c bezeichnet.

Abgabe: 13.05.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/>