

## Differentialgeometrie

### Übungsblatt 6

Sommersemester 2008

---

#### Aufgabe 1 (Rotationsflächen)

- Geben Sie eine Parametrisierung der aus  $c$  entstehenden Rotationsfläche an. Wann ist die Parametrisierung regulär?
- Skizzieren oder plotten Sie die aus  $c(t) := (\cos t, 2 + \sin t, 0)$  entstehende Rotationsfläche.
- Wann ist eine Rotationsfläche eine Untermannigfaltigkeit?

Sei  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Für  $q \in \mathbb{R}^2$  definieren wir durch

$$I_q(w_1, w_2) := \langle D\Psi(q).w_1, D\Psi(q).w_2 \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ . Wir schreiben dann  $\begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}$  für die Darstellungsmatrix von  $I_q$ .

#### Aufgabe 2 (1. Fundamentalform)

Die Parametrisierung  $\Psi$  heißt längentreu, wenn für alle Kurven  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt  $L(c) = L(\Psi \circ c)$ .

- Zeigen Sie:  $\Psi$  ist längentreu genau dann wenn  $E = G = 1$  und  $F = 0$ .
- Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Berechnen Sie die Formen  $I_q$  des Graphen  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$  und von  $Y(\theta, \varphi) := (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$  als Funktion von  $q$ .

#### Aufgabe 3 (Zylinder und Sphäre)

Die Abbildung  $\Psi : \mathbb{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Psi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  beschreibt einen Zylinder, der die Sphäre  $S^2$  längs des Äquators berührt.

- Zeigen Sie:  $\Psi$  ist längentreu.
- Bezeichne  $X(u, v)$  den Schnittpunkt der Strecke von  $\Psi(u, v)$  zum Punkt  $(0, 0, v)$  mit der Sphäre  $S^2$ . Berechnen Sie  $X : \mathbb{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, daß die Abbildung  $X$  flächentreu ist, und bestimmen Sie so den Flächeninhalt der Sphäre. (Der Flächeninhalt von  $X$  auf  $U$  ist definiert als  $A(X) := \int_U \sqrt{(EG - F^2)}(u, v) du dv$ .)

---

Abgabe: 27.05.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/>