

## Differentialgeometrie

### Übungsblatt 7

Sommersemester 2008

---

#### Aufgabe 1 (Untermannigfaltigkeiten)

$y$  heißt *regulärer Wert* einer glatten Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , falls für alle  $x \in f^{-1}(y)$  das Differential  $Df(x)$  maximalen Rang hat. Eine Untermannigfaltigkeit ist laut Vorlesung eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die lokal wie das Urbild eines regulären Wertes aussieht. Zeigen Sie:

$M$  ist  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  genau dann, wenn für jeden Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$ , eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $0 \in \mathbb{R}^n$  und ein Diffeomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$  existieren, so daß  $\varphi(p) = 0$  und  $\varphi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$  ist.

#### Aufgabe 2 (Möbiusband)

In dieser Aufgabe bezeichne  $M \subset \mathbb{R}^3$  das Möbiusband aus Aufgabe 4 von Blatt 1. Zeigen Sie:

- $M$  ist eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .
- $M$  ist nicht orientierbar.
- $M$  läßt sich nicht als Niveaufläche darstellen, d.h. es existiert kein  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $M = f^{-1}(c)$  für einen regulären Wert  $c$ .

#### Aufgabe 3 (Tangentialbündel)

Das *Tangentialbündel* einer  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$TM := \dot{\bigcup}_{x \in M} (\{x\} \times T_x M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, daß  $TM$  eine  $2k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ist.

#### Aufgabe 4 (Rotationsvektorfeld)

Sei  $c(t) := (\cos t, 2 + \sin t, 0)$  und  $\Phi : ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi(t, \theta) := (\cos t, (2 + \sin t) \cos \theta, (2 + \sin t) \sin \theta)$  die zugehörige Rotationsfläche (*Rotationstorus*).

- Was sind die Bilder von  $\partial_t$  und  $\partial_\theta$  unter  $\Phi$ ?
- Bestimmen Sie die zugehörigen Flußkurven auf dem Rotationstorus und zeichnen oder plotten Sie sie.

---

Abgabe: 03.06.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/>