Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 8 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Höhenfunktion der Sphäre)

Sei $\Phi :]0, 2\pi[\ \times\ ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ eine Parametrisierung der 2-Sphäre S^2. Auf dem Parametergebiet betrachten wir die Funktion $H :]0, 2\pi[\ \times\ ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $H(u, v) = v$.

(a) Lösen Sie $\dot{z}(t) = (\partial_v H, -\partial_u H)(z(t))$ und skizzieren oder plotten Sie die Flußkurven.

(b) Berechnen sie das Bild des Vektorfeldes $(\partial_v H, -\partial_u H)$ unter $D\Phi$? Skizzieren oder plotten Sie das so gewonnene Tangentialvektorfeld auf S^2 und die zugehörigen Flußkurven. Geometrische Bedeutung?

Aufgabe 2 (Vektorfelder auf kompakten Flächen)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche und $X : M \to \mathbb{R}^3$ ein (Tangential-) Vektorfeld auf M. Zeigen Sie, daß das Vektorfeld X *vollständig* ist (das heißt die Flußkurven von X sind definiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 3 (Winkeltreue Parametrisierungen)

Eine Parametrisierung $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ heißt *winkeltreu*, falls für alle regulären Kurven $c_1, c_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\ \to U$ mit $c_1(0) = c_2(0)$ der euklidische Winkel zwischen $\dot{c}_1(0)$ und $\dot{c}_2(0)$ mit dem zwischen $D\Phi|_{c_1(0)}.\dot{c}_1(0)$ und $D\Phi|_{c_2(0)}.\dot{c}_2(0)$ übereinstimmt. Zeigen Sie: Falls in der 1. Fundamentalform $E = G > 0$ und $F = 0$ gilt, so ist Φ winkeltreu. (Gilt auch die Umkehrung?)

Aufgabe 4 (Polarkoordinaten und Mercator-Karte auf der 2-Sphäre)

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times\ ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ parametrisiert die Sphäre.

(a) Bestimmen Sie eine Umparametrisierung Ψ der Gestalt $\Psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, f(\tilde{v}))$, so daß $\tilde{\Phi} := \Phi \circ \Psi$ winkeltreu ist (*Mercator-Karte*). *Hinweis:* $f(t) := 2 \arctan e^t - \frac{\pi}{2}$ löst $f'(t) = \cos f(t)$.

(b) Wenn eine Kurve alle Längenkreise unter einem festen Winkel schneidet, heißt sie *Loxodrome*. Wie sieht eine solche Kurve in der Parameterebene von $\tilde{\Phi}$ aus und wie auf der Sphäre? (Anwendung: Schiffahrt.)

Aufgabe 5 (Tangentenflächen)

Zu einer regulären Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist die *Tangentenfläche* gegeben durch $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(s, t) := c(t) + s\dot{c}(t)$. Basteln Sie eine Tangentenfläche.

Anleitung: Legen Sie zwei Blatt Papier übereinander und schneiden Sie sie so übereinanderliegend längs einer konvexen Kurve (mit Endpunkten auf dem Blattrand) in zwei Teile. Kleben Sie nun die beiden konkaven Teile längs der Schnittkurve (z.B. mit Tesafilm) zusammen. Nun können Sie die Schnittkurve zu einer Raumkurve mit Torsion verbiegen und dabei die beiden Hälften aufklappen.

Warum ergibt das eine Tangentenfläche? Zeichnen Sie die Tangentengeraden ein.

Abgabe: 10.06.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/