

Differentialgeometrie

Übungsblatt 9

Sommersemester 2008

Aufgabe 1 (Gauß-Krümmung)

$\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiere eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Es seien $(g_{ij})(q)$ und $(h_{ij})(q)$ für $q \in U$ die Darstellungsmatrizen der 1. und 2. Fundamentalform von M bezüglich Φ . K bezeichne die Gauß-Krümmung von M . Zeigen Sie:

$$K \circ \Phi = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Aufgabe 2 (Krümmung von Rotationsflächen)

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(s) := (x(s), y(s), 0)$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $y(s) > 0$ für alle $s \in I$. Sei $\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(s, t) := (x(s), y(s) \cos t, y(s) \sin t)$ die zugehörige Rotationsfläche bezüglich der x -Achse.

- Berechnen Sie die 1. und 2. Fundamentalform und bestimmen Sie die Hauptkrümmungen, die Hauptkrümmungsrichtungen, die Gaußsche und die mittlere Krümmung.
- Skizzieren oder plotten Sie für den Rotationstorus die Bereiche mit positiver bzw. negativer Gauß-Krümmung.
- Berechnen Sie:

$$\int_{\mathbb{T}^2} K := \int_{]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[} K \circ \Phi \sqrt{EG - F^2} \, ds dt.$$

Aufgabe 3 (Gauß-Abbildung des Torus)

$\Phi :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Parametrisierung des Rotationstorus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 2 mit $c(s) = (\cos s, 2 + \sin s, 0)$. $N : \mathbb{T}^2 \rightarrow S^2$ sei die Gauß-Abbildung.

- Zeigen Sie: N ist surjektiv, und bestimmen Sie für alle $p \in S^2$ die Anzahl der Urbilder. *Hinweis:*

$$N|_{\Phi(s,t)} = \frac{\partial_s \Phi \times \partial_t \Phi}{|\partial_s \Phi \times \partial_t \Phi|}(s, t)$$

- Folgern Sie:

$$\int_{]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[} |K \circ \Phi| \sqrt{EG - F^2} \, ds dt = 8\pi.$$

Aufgabe 4 (Konstante Gauß-Abbildung)

Zeigen Sie, daß das Bild einer zusammenhängenden Fläche im \mathbb{R}^3 unter der Gauß-Abbildung genau dann ein Punkt ist, wenn die Fläche in einer Ebene enthalten ist.

Abgabe: 17.06.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/>