Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 10 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Flächeninhalt)

Sei $M = \Phi(U)$ eine eingebettete Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}(M) := \int_U \sqrt{\det((d\Phi(z))^T d\Phi(z))}dz$$

ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung Φ.

Aufgabe 2 (Regelflächen)

Seien X, $c : I \to \mathbb{R}^3$ regulär. Dann heißt $\Phi : U \subset \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Phi(s,t) := c(t) + sX(t)$ *Regelfläche*. Für $t \in I$ setze $\gamma_t(s) := \Phi(s,t)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle t gilt: $II(\frac{d}{ds}\gamma_t(s), \frac{d}{ds}\gamma_t(s)) = 0$ längs $s \mapsto \gamma_t(s)$, speziell also $K \leq 0$.

(b) Es ist äquivalent:

  a) Für alle $t \in I$ ist der Normalenvektor konstant längs $s \mapsto \gamma_t(s)$, d.h. $\partial_s N = 0$ („Φ Torse“).

  b) $\partial_s \partial_t \Phi$ ist linear abhängig von $\partial_s \Phi$ und $\partial_t \Phi$.

  c) $K \equiv 0$ („Φ abwickelbar“)

Aufgabe 3 und 4 (Rotationsflächen konstanter Gauß-Krümmung)

Sei $c(s) = (x(s), y(s), 0)$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $y > 0$ und

$$\Phi(s,t) := (x(s), y(s)\cos t, y(s)\sin t)$$

die zugehörige Rotationsfläche bzgl. der x-Achse.

Bestimmen Sie alle Rotationsflächen mit konstanter Gauß-Krümmung $K \equiv +1$, -1 und 0 und skizzieren oder plotten Sie sie. Geben Sie dazu jeweils die Formel für y und das maximale Definitionsintervall von c an.

Hinweise:

(a) Die Gauß-Krümmung von Rotationsflächen wurde bereits in Aufgabe 2, Blatt 9 berechnet.

(b) Die Bedingung $K \equiv$ *konstant* liefert eine Differentialgleichung für y. Wie sehen die Lösungen von $f'' = -f$, $f'' = f$ und $f'' = 0$ aus?

(c) Für jeden der drei Fälle $K \equiv +1$, -1, 0 gibt es drei „Lösungstypen“.

Abgabe: 24.06.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/