Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 11 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Lokale Isometrie)

Für $i \in \{1,2\}$ sei $\Phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \to M_i \subset \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche M_i. Bezeichne mit I^i die erste Fundamentalform von M_i. Sei $f : M_1 \to M_2$ glatt und $\bar{f} := \Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1$. Definiere

$$(f^* I^2)_p(v,w) := I^2_{f(p)}(df(p)v, df(p)w)$$

für $p \in M_1$ und v, $w \in T_pM_1$ und analog $g^i := \Phi_i^* I^i$ für U_i.

Zeigen Sie: $f : M_1 \to M_2$ ist eine lokale Isometrie genau dann, wenn $\bar{f}^* g^2 = g^1$.

Aufgabe 2 (Helikoid und Katenoid)

Sei $a \neq 0$ und $\Phi :]0,2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ eine Parametrisierung des Katenoids. $\Psi :]0,2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Psi(u,v) := (v \cos u, v \sin u, au)$ parametrisiert das Helikoid (Wendelfläche).

(a) Berechnen Sie die ersten Fundamentalformen.

(b) Zeigen Sie: Das Katenoid und das Helikoid sind lokal isometrisch (*Hinweis:* Aufgabe 1).

Aufgabe 3 (Paralleltransport auf dem Kegel)

Sei $M_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ der Kegel mit Öffnungswinkel α. Bezeichne mit $U_\theta \subset \mathbb{R}^2$ den offenen Sektor mit Innenwinkel $\theta = 2\pi \sin \alpha$. Sei L eine Mantellinie des Kegels.

(a) Finden Sie eine explizite Isometrie zwischen U_θ und $M_\alpha \backslash L$.

(b) Lassen sich je zwei Punkte auf dem Kegel M_α durch eine Geodätische verbinden?

(c) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist der Paralleltransport zwischen zwei Punkten unabhängig vom gewählen Weg. Gilt dies auch auf M_α?

Aufgabe 4 (Paralleltransport auf der Sphäre)

(a) M und $\tilde{M}$ seinen zwei Flächen, die sich längs der parametrisierten Kurve c tangential berühren. Sei $v_0 \in T_{c(0)}M = T_{c(0)}\tilde{M}$.

Zeigen Sie: $P_c(t)$ ist die Parallelverschiebung von v_0 längs c bzgl. M genau dann, wenn $P_c(t)$ die Parallelverschiebung von v_0 längs c bzgl. $\tilde{M}$ ist.

(b) Nun sei c nach Bogenlänge parametrisiert und beschreibe einen Breitenkreis der S^2. Sei $v_0 \in T_{c(0)}S^2$. Berechnen Sie den Paralleltransport von v_0 längs des Breitenkreises.

Hinweis: Betrachten Sie den Kegel, der S^2 längs c berührt, und verwenden Sie den ersten Aufgabenteil.

Abgabe: 01.07.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/