Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 12 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Konvexe Körper)

Wir nennen $K \subset \mathbb{R}^3$ einen *konvexen Körper*, falls die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten von K in K liegt. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, konvexe, zusammenhängende Fläche wie in der Vorlesung definiert.

Zeigen Sie: M berandet einen konvexen Körper.

Aufgabe 2 (Geodäten auf Rotationsflächen)

Sei $c(s) = (x(s), y(s), 0)$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $y > 0$ und

$$\Phi(s,t) := (x(s), y(s)\cos t, y(s)\sin t)$$

die zugehörige Rotationsfläche bzgl. der x-Achse. $c(\tau) = (s(\tau), t(\tau))$ bescheibt eine Kurve in der Parameterebene. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Meridiane und Breitenkreise $s = \ \mathit{konst}$ mit $y'(s) = 0$ Geodäten sind. Zeigen Sie:

(a) Der allgemeine Geodätentyp sind Kurven $\gamma(\tau) = \Phi(c(\tau))$ mit $y^2(s(\tau))t'(\tau) = C$, wobei $C = C_\gamma$ eine von der Geodäten abhängige Konstante ist. Bei Parametrisierung von γ nach Bogenlänge gilt ferner $(s')^2(\tau) + y^2(s(\tau))(t')^2(\tau) = 1$.

(b) Was passiert, wenn sich γ einem Breitenkreis mit Radius C_γ nähert?

(c) Sei nun γ ein Geodäte, aber kein Meridian oder Breitenkreis. Dann oszilliert γ zwischen den zwei nächstliegenden, γ einschließenden Breitenkreisen mit Radius C_γ, sofern solche existieren und keine Geodäten sind.

Aufgabe 3 (Geodäten auf dem Rotationsparaboloid)

(a) Parametrisieren Sie das Paraboloid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2 + z^2\}$ als Rotationsfläche.

(b) Kann es Geodäten wie in Aufgabe 2(b) geben?

(c) Bestimmen Sie das qualitative Verhalten von Geodäten, die keine Meridiane sind, und skizzieren oder plotten Sie sie. Zeigen Sie, daß jede Geodäte, die kein Meridian ist, sich selbst unendlich oft schneidet.

Aufgabe 4 (Familie von Minimalflächen)

Für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei $\Phi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(s,t) := \begin{pmatrix} \sin\theta\cosh s\cos t + \cos\theta\sinh s\sin t \\ \sin\theta\cosh s\sin t - \cos\theta\sinh s\cos t \\ s\sin\theta + t\cos\theta \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) Φ_0 ist eine Wendelfläche und $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ ein Katenoid.

(b) Die erste Fundamentalform von Φ_θ stimmt für alle θ überein. Bedeutung?

(c) Alle Φ_θ sind Minimalflächen, d.h. die mittlere Krümmung verschwindet für alle θ.

Abgabe: 08.07.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/