Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz Dr. Oliver Baues
Dr. Sonja Hohloch

Differentialgeometrie

Übungsblatt 13 **Sommersemester 2008**

Aufgabe 1 (Katenoid und Helikoid)

Zeigen Sie: Das Katenoid und das Helikoid aus Aufgabe 4, Blatt12, sind weder lokal noch global zueinander kongruent, d.h. sie können nicht durch eine Isometrie des (euklidischen) $\mathbb{R}^3$ ineinander überführt werden, auch nicht lokal.

Aufgabe 2 (Minimalflächen)

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück mit Normale $N : U \to S^2$ und $f : U\times\,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(z,0) = 0$ für alle $z \in U$. Wir nennen $\Phi_\tau : U\times\,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \to \mathbb{R}^3$, $\quad \Phi_\tau(z) := \Phi(z) + f(z,\tau)N(z)$ eine *Normalenvariation* von Φ und setzen $A(\Phi_\tau|_U) := \int_U (\sqrt{E_\tau G_\tau - F_\tau^2})(z)dz$. Dann ist äquivalent:

(a) Φ ist eine *Minimalfläche*, d.h. $\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} A(\Phi_\tau) = 0$ für jede Normalenvariation Φ_τ von Φ.

(b) Für die mittlere Krümmung H von $\Phi = \Phi_0$ gilt: $H = 0$.

Aufgabe 3 (Rotationsflächen mit $H \equiv 0$)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $c(s) := (x(s), y(s), 0)$ regulär, nach Bogenlänge parametrisiert und $y > 0$. Die zugehörige Rotationsfläche um die x-Achse ist $\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(s,t) := (x(s), y(s)\cos t, y(s)\sin t)$.

(a) Zeigen Sie: Falls $x'(s) \neq 0$ für alle $s \in I$, so ist

$$H(s,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x'(s)}{y(s)} + x''(s)y'(s) - y''(s)x'(s)\right) = \frac{1}{2x'(s)y(s)}\left(1 - \left(\frac{y^2}{2}\right)''(s)\right).$$

(b) Bestimmen Sie alle Rotationsflächen mit $H \equiv 0$. Zeigen Sie, daß sich jede dieser Flächen nach Umparametrisierung darstellen läßt als

$$\Psi(u,v) = \left(u + u_0, a\cosh\frac{u}{a}\cos v, a\cosh\frac{u}{a}\sin v\right)$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. *Hinweis:* $F(s) := \operatorname{arsinh}\frac{s}{a}$ ist eine Stammfunktion von $f(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$.

Aufgabe 4 (Kovariante Ableitung und Christoffel-Symbole)

Seinen X und Y (tangentiale) Vektorfelder auf einer parametrisierten Fläche $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und N das Normalenfeld. $D_Y X := dX.Y - \langle dX.Y, N\rangle N$ ist die kovariante Ableitung von X nach Y. Zeigen Sie:

(a) $D_{fY}X = fD_Y X$ und $D_Y(fX) = df(Y)X + fD_Y X$ (Produktregel).

(b) Wir schreiben $X|_{\Phi(x)} = X_1(x)\partial_{x_1}\Phi|_{\Phi(x)} + X_2(x)\partial_{x_2}\Phi|_{\Phi(x)}$ für Funktionen $X_i : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$(D_{\partial_{x_i}\Phi}\partial_{x_j}\Phi)|_{\Phi(x)} =: \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(x)\partial_{x_k}\Phi|_{\Phi(x)}$$

differenzierbare Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ (*Christoffel-Symbole*) definiert. Zeigen Sie, dass $D_Y X$, die Geodätengleichung und R_{1212} sich mit Hilfe der Christoffel-Symbole ausdrücken lassen.

Abgabe: 15.07.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/