

Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Sommersemester 2008

Aufgabe 1 (Konvexe Kurven)

Zeigen Sie, dass eine einfach geschlossene konvexe Kurve mit einer Geraden höchstens zwei Schnittpunkte hat oder die Kurve enthält ein Geradenstück.

Aufgabe 2 (Flächeninhalt berandeter Gebiete)

Die einfach geschlossene, glatte Kurve $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ berande das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Dabei umlaufe $c(t) = (x(t), y(t))$ das Gebiet G im mathematisch positiven Sinne, d.h. $n(c) = 1$. $A(G)$ bezeichne den Flächeninhalt von G . Zeigen Sie:

$$A(G) = - \int_0^T \dot{x}(t)y(t)dt = \int_0^T x(t)\dot{y}(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Divergenzsatz von Gauß.

Aufgabe 3 (Isoperimetrische Ungleichung)

Zeigen Sie die *isoperimetrische Ungleichung*: Für jede einfach geschlossene C^1 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$L^2(c) \geq 4\pi A(c) \quad \text{mit „=“ genau dann, wenn } c \text{ ein Kreis ist.}$$

Hierbei bezeichne $A(c)$ den Flächeninhalt des von c berandeten Gebiets.

Hinweis: Es gibt unterschiedliche Beweise in der Literatur — ein Blick lohnt sich durchaus. Einige stützen sich auf Aufgabe 2. Sehr elementargeometrisch geht E. Schmidts Beweis vor (vgl. Blaschke/Leichtweiß u.a.).

Aufgabe 4 (Regelflächen)

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar. $X : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(s, t) := c(t) + sV(t)$ heißt *Regelfläche*. X heißt *regulär* in (s, t) , falls das Differential DX Rang 2 hat.

- Finden und skizzieren oder plotten Sie zwei Beispiele.
- Unter welchen Bedingungen ist X in (s, t) regulär?
- Zeigen Sie: Die Tangentialebene in $X(s, t)$ ist genau dann unabhängig von s , wenn die Vektoren $\dot{c}(t)$, $\dot{V}(t)$, $V(t)$ linear abhängig sind.

Abgabe: 20.05.08 bis 13 Uhr in den Differentialgeometrie-Kasten beim SR 32. Die Übungsblätter sind auch im Netz erhältlich unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeo2008s/>