Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie — Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 11 — **27.01.2015**

Aufgabe 1 *(Anwendung von Hopf-Rinow I)*

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *homogen*, falls die Isometriegruppe $\text{Isom}(M)$ transitiv auf M operiert, d.h., zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es eine Isometrie $\Phi \in \text{Isom}(M)$, so dass $\Phi(p) = q$.

Zeigen Sie, dass jede homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit vollständig ist.

Aufgabe 2 *(Anwendung von Hopf-Rinow II)*

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

a) Zeigen Sie ein weitere Äquivalenz:
M ist genau dann vollständig, wenn es eine Folge kompakter Teilmengen $K_n \subset M$ mit $K_n \subset K_{n+1}$ und $\bigcup K_n = M$ gibt, sodass für $q_n \notin K_n$ gilt: $d(p, q_n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.

Eine *divergente Kurve* in M ist eine differenzierbare Abbildung $\eta : [0, \infty) \to M$, sodass es für jedes Kompaktum $K \subset M$ ein $t_0 \in (0, \infty)$ gibt mit $\eta(t) \notin K$ für alle $t > t_0$. Die Länge einer divergenten Kurve η wird als

$$L(\eta) := \lim_{t \to \infty} \int_0^t \|\dot{\eta}(t)\| dt$$

definiert.

b) Zeigen Sie, dass M genau dann vollständig ist, wenn die Länge jeder divergenten Kurve unbeschränkt ist.

Aufgabe 3 *(Hyperbolische Ebene)*

Zeigen Sie, dass die hyperbolische Ebene $(\mathbb{H}^2, g)$ vollständig ist.