Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 2

04.11.2014

Aufgabe 1 *(Der Torus)*

a) Zeigen Sie, dass es für den Rotationstorus

$$T_R := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $0 < r < a$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_R$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass es für den flachen Torus $T_F := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_F$ gibt.

c) Finden Sie einen Diffeomorphismus zwischen $(T_R, \mathcal{A}_R)$ und $(T_F, \mathcal{A}_F)$.

Aufgabe 2 *(Produktmannigfaltigkeiten)*

Seien $(M^m, \mathcal{A}_M)$ und $(N^n, \mathcal{A}_N)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}_M := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ und $\mathcal{A}_N := \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$.
Wir definieren $h_{ij} : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n}$, $(p,q) \mapsto (\varphi_i(p), \psi_j(q))$.

a) Zeigen Sie, dass $\{(U_i \times V_j, h_{ij})\}_{(i,j)\in I\times J}$ ein differenzierbarer Atlas für $M \times N$ ist.

b) Es sei $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ der Einheitskreis.
Finden Sie einen Diffeomorphismus vom Rotationstorus T_R auf die Produktmannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$.

Aufgabe 3 *(Transformationsformel)*

Seien M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$, $q \mapsto x(q)$ sowie $\psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^n$, $q \mapsto y(q)$ Karten von M mit $p \in U \cap V$.

a) Zeigen Sie, dass $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)}$ eine Derivation ist.

b) Beweisen Sie die Transformationsformel:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(x_j \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}(\psi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p .$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$ die Basisderivationen bezüglich der Karte (V, ψ).