Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 3 **11.11.2014**

Aufgabe 1 *(Geometrischer Tangentialraum)*

Es seien M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $c_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \to M$ $(i = 1, 2)$ differenzierbare Kurven mit $c_i(0) = p \in M$. Die Kurven c_1 und c_2 heißen *äquivalent* ($c_1 \sim c_2$), falls eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ existiert, so dass

$$\frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0).$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^∞-Kurven c mit $c(0) = p$ definiert.
   Jede Äquivalenzklasse $[c]$ heißt *(geometrischer) Tangentialvektor* an M in p. Die Menge der geometrischen Tangentialvektoren $T_p^{\text{geo}}M$ in p heißt *(geometrischer) Tangentialraum* von M in p.

b) Sei (U, φ) eine Karte an $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$A : T_p^{\text{geo}}M \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto \frac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0)$$

   bijektiv ist.
   $T_p^{\text{geo}}M$ lässt sich dann zu einem n-dimensionalen Vektorraum machen:

$$\lambda_1[c_1] + \lambda_2[c_2] := A^{-1}(\lambda_1 A[c_1] + \lambda_2 A[c_2]\ ).$$

   Zeigen Sie ferner, dass diese Vektorraumstruktur unabhängig von der Wahl der Karte (U, φ) ist.

(c) Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : T_p^{\text{geo}}M \to T_pM,\ [c] \mapsto X_{[c]} \quad \text{mit} \quad X_{[c]}(g) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \circ c(t),\ g \in C^\infty(p).$$

   Zeigen Sie, dass $X_{[c]}$ eine Derivation und Φ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 2 *(Spezielle differenzierbare Abbildungen)*

a) Es seien M_1, M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i\ ;\ (p_1, p_2) \mapsto p_i$$

   Submersionen sind.

b) Es sei $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$. Zeigen Sie, dass f eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist.

Aufgabe 3 *(Untermannigfaltigkeiten)*

Es sei $(N^n, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ (versehen mit der Teilraumtopologie) heißt *m-dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit* von N, falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $p \in U$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathfrak{o}\}), \quad \mathfrak{o} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n-m}, \ (m \leq n).$$

Jede solche Karte (U, φ) nennt man *eine an M angepasste Karte*.
Sei weiter $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion $\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_m)$.

Zeigen Sie, dass

$$\left\{ (U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \ | \ (U, \varphi) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ angepasste Karte } \right\}$$

ein differenzierbarer Atlas von M ist.
Hierdurch wird M zu einer m-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit.