Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie — Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 4 — **18.11.2014**

Aufgabe 1 *(Tangentialbündel)*

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und TM das Tangentialbündel von M.
Zeigen Sie:

a) Die Projektion $\pi : TM \to M\ ;\ (p, v) \mapsto p$ ist eine Submersion.

b) Der *Nullschnitt* $\sigma : M \to TM\ ;\ p \to (p, 0)$ ist eine Einbettung.

Aufgabe 2 *(Heisenberg-Gruppe)*

a) Zeigen Sie, dass die *Heisenberg-Gruppe*

$$H_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$$

eine Lie-Gruppe ist.

b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_e H_3(\mathbb{R})$ von $H_3(\mathbb{R})$ mit $e = I_3$.
(Hinweis: Aufgabe 1 auf Blatt 3.)

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

mit

$$[X, Y] := XY - YX$$

zu einer Lie-Algebra wird.

Aufgabe 3 *(Riemannsche Isometrien)*

a) Zeigen Sie, dass ein Diffeomorphismus $F : (M, g) \to (N, h)$ zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten genau dann eine Isometrie ist, wenn F die Länge jeder differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ invariant lässt: $L(c) = L(F \circ c)$.

b) Zeigen Sie, dass die Isometrien $F : M \to M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe $\mathrm{Isom}(M)$ bilden. Diese Gruppe heißt *Isometrie-Gruppe* von M.

c) Wir betrachten die *hyperbolische Ebene* $(\mathbb{H}^2, g)$ mit

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

und der Metrik g, definiert bzgl. der Karte *id* durch

$$\big(g_{ij}(z)\big) := \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ die Möbius-Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Isometrien von $\mathbb{H}^2$ sind.