Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 5 **25.11.2014**

Aufgabe 1 *(n-dimensionale hyperbolische Geometrie)*

Es sei

$$* : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto x * y := x_1 y_1 + ... + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

das *Lorentz-Minkowski-Produkt* und

$$\mathbb{L}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x * x = -1, \; x_{n+1} > 0 \right\}$$

Zeigen Sie, dass $*_p := *_{|T_p\mathbb{L}^n \times T_p\mathbb{L}^n}$ ein Skalarprodukt definert und $(\mathbb{L}^n, *)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: $(\mathbb{L}^n, *)$ heißt *Hyperboloidmodell* der n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie.

Aufgabe 2 *(n-dimensionale sphärische Geometrie)*

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik g_S. Zeigen Sie:

a) Die Antipodal-Abbildung $A : S^n \to S^n; \; p \mapsto -p$ ist eine Riemannsche Isometrie.

b) $\mathrm{Isom}(S^n, g_S) \cong O(n+1)$

Aufgabe 3 *(Affiner Zusammenhang)*

Es seien $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und D der kanonische, von $\mathbb{R}^2$ induzierte, Zusammenhang auf M. Die Vektorfelder E_1 und E_2 seien die Basisfelder bezüglich der Karte $(\mathbb{R}^2, id)$. Weiter seien die Vektorfelder X und Y auf M definiert durch

$$X(p) := -yE_1(p) + xE_2(p)$$

und

$$Y(p) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (xE_1(p) + yE_2(p))$$

für $p = (x, y) \in M$.

Berechnen Sie $D_X Y$ sowie $D_Y X$.