Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie — Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 6 — **02.12.2014**

Aufgabe 1 *(Parallelverschiebung)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und D ein affiner Zusammenhang auf M. Weiter sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve und $c||_s^t : T_{c(s)}M \to T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung entlang c.

a) Zeigen Sie, dass $c||_s^t$ invertierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung im Allgemeinen von der Kurve und nicht nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Aufgabe 2 *(Christoffelsymbole)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda : M \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $\widetilde{g} := \lambda \cdot g$ ebenfalls eine Riemannsche Metrik auf M.

a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ bezüglich $\widetilde{g}$ in Abhängigkeit von g, λ und den Christoffel-Symbolen Γ_{ij}^k bezüglich g.

b) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ mit der durch

$$g_{ij}(z) = \begin{cases} \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

definierten Riemannschen Metrik (bezüglich der Karte $(\mathbb{H}^2, id)$) .

Aufgabe 3 *(Isometrien und Geodätische)*

Es seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Zusammenhängen D und D'. Weiter sei $F : M \to N$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass F den Levi-Civita-Zusammenhang in folgendem Sinne erhält:

$$dF(D_X Y) = D'_{dF(X)} dF(Y), \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{VM}.$$

Zeigen Sie weiter, dass Isometrien Geodätische auf Geodätische abbilden.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\widetilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} := dF(D_{dF^{-1}(\tilde{X})} dF^{-1}(\tilde{Y}))$ der Levi-Cicvita-Zusammenhang von N ist und nutzen Sie dessen Eindeutigkeit.