Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 7 **09.12.2014**

Aufgabe 1 *(Geodätische der hyperbolischen Ebene)*

Zeigen Sie durch Lösen des Geodätischen Differentialgleichungssystems, dass die Geodätischen in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ nach hyperbolischer Bogenlänge parametrisierte Halbkreise bzw. Halbgeraden orthogonal zur x-Achse sind.

Aufgabe 2 *(Kürzeste sind Geodätische I)*

Es sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Die *Energie* von c ist definert als

$$E(c) := \frac{1}{2} \int_a^b \|c'(t)\|^2_{c(t)} dt$$

Zeigen Sie, dass für die Länge $L(c)$ gilt:

$$L(c)^2 \leq 2(b - a) \cdot E(c)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 3 *(Kürzeste sind Geodätische II)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (φ, U) eine Karte, sowie

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

die lokale Darstellung einer Kurve $\gamma : [a, b] \to M$.

<u>Fakt[1]:</u>
Ist $\varphi \circ \gamma$ Minimum eines Variationsintegrals

$$F(\varphi \circ \gamma) = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

So gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, ..., n$$

Zeigen Sie, dass eine Kurve γ genau dann die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Energie $E(\gamma)$ erfüllt, wenn γ das Geodätische Differentialgleichungssystem erfüllt.

Folgern Sie daraus insbesondere, dass lokal-kürzeste, nach Bogenlänge parametrisierte Kurven Geodätische sind.

[1] vgl. V. I. Arnol'd, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser, 1988.