Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 9 **09.01.2015**

Aufgabe 1 *(Riemannscher Krümmungstensor)*

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor

$$R : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$$

eine $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 *(Schnittkrümmung der hyperbolischen Ebene)*

Bestimmen Sie die Komponenten R_{ijk}^m des Riemannschen Krümmungstensors R der hyperbolischen Ebene $(\mathbb{H}^2, g)$ bezüglich der Karte $(\mathbb{H}^2, id)$ und berechnen Sie dann deren Schnittkrümmung.

Erinnerung: Die Riemannsche Metrik g ist gegeben durch $g_{ij}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$.

Aufgabe 3 *(Parallelverschiebung und Krümmung)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, dass für je zwei Punkte $p, q \in M$ die Parallelverschiebung von p nach q bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs unabhängig von der gewählten Kurve ist.
Zeigen Sie, dass dann die Krümmung von (M, g) konstant 0 ist, d.h.

$$R(X,Y)Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{V}M$$