

## Differentialgeometrie:

### Einige Fragen zur Vorlesung als Lernkontrolle

**1. Mannigfaltigkeiten:** Was ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (Mf)? Geben Sie je ein Beispiel einer kompakten und einer nicht kompakten Mf? Beispiel eines topologischen Raumes, der keine Mf ist? Wie ist die Dimension einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definiert? Impliziert "lokal euklidisch" "hausdorffsch"? Was versteht man unter dem  $n$ -dimensionalen reell projektiven Raum  $P^n\mathbb{R}$ ? Wieso ist  $P^n\mathbb{R}$  hausdorffsch? Was ist eine offene Untermannigfaltigkeit? Wie ist die allgemeine lineare Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  definiert und wieso ist das eine Mf? Was ist eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mf? Was ist der Tangentialraum in einem Punkt  $p$  einer Mf? Wie kann man Tangentialvektoren bezüglich einer Karte darstellen? Was folgt aus dem Basissatz über die Dimension einer Mf? Wie ist die Tangentialabbildung (Differential) einer differenzierbaren Abbildung definiert? Wie lautet die Kettenregel (invariant und in lokalen Koordinaten)? Wann ist eine differenzierbare Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus? Kriterium? Was haben Tangentialvektoren an Kurven mit dem Differential zu tun? Geben Sie Beispiele für Submersionen, Immersionen, Einbettungen und (reguläre) Untermannigfaltigkeiten. Was ist eine Liealgebra? Beispiel? Was ist eine Integralkurve eines Vektorfeldes und was ist der Zusammenhang mit Differentialgleichungen?

**2. Riemannsche Metriken:** Definition einer Riemannschen Metrik (RM) und einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (RMf)? Wann ist eine Abbildung zwischen RMf eine (Riemannsche) Isometrie? Geben Sie 6 Beispiele von RMf an. Was versteht man unter einem Riemannschen Produkt? Welche geometrischen Invarianten kann man mittels einer RM definieren? Wie ist eine RM bezüglich einer Karte gegeben? Was können Sie über Existenz und Eindeutigkeit einer RM sagen? Was ist die Beweisidee des Existenz-Satzes für eine RM und wie lauten die Voraussetzungen?

**3. Affiner Zusammenhang und Parallelverschiebung:** Was versteht man unter einem affinen Zusammenhang auf einer Mf? Existenz und Eindeutigkeit? Formel bezüglich lokalen Koordinaten? Was ist ein paralleles Vektorfeld? Was versteht man unter Parallelverschiebung? Wie beweist man die Existenz eines parallelen Vektorfeldes (zu gegebenen Anfangswerten)? Wie ist der Levi-Civita Zusammenhang einer RMf charakterisiert?

**4. Geodätische:** Was ist eine Geodätische (Linie)? Definitionsgleichung? Wieso ist eine Geo immer automatisch proportional zur BL parametrisiert? Wie lautet die (lokale) Differentialgleichung für Geos? Gegeben sei ein Punkt  $p$  einer RMf. Was können Sie über die Geos durch  $p$  sagen: Existenz? Wieviele gibt es? Durch welche Daten sind sie gegeben? Wie ist die Exponential-Abbildung definiert? Was besagt das Gauß-Lemma und wie wird es verwendet, um Minimaleigenschaften von Geos herzuleiten? Was versteht man unter einer total normalen Umgebung? Gibt es für jeden Punkt einer RMf solche Umgebungen? Wie kann man Geos durch Vergleich mit Nachbarkurven erkennen? Wie beweist man, dass die Geos auf einer Sphäre (mit kanonischer Metrik) genau die mit BL parametrisierten Großkreise sind (ohne eine Differentialgleichung zu lösen!)?

**5. Krümmung:** Was versteht man unter dem Riemannschen Krümmungstensor  $R$  einer Riemannschen Mf? Was ist ein Tensor(feld)? Geben sie 4 Symmetrie-Eigenschaften des Krümmungstensors an. Wie beschreibt man  $R$  in lokalen Koordinaten? Was ist die Schnittkrümmung? Wieso hat die Sphäre mit kanonischer Metrik konstante Schnittkrümmung? Wie sind Ricci- und Skalar-Krümmung definiert? Was ist ein Einstein-Raum? Beispiel?

**6. Jacobi-Felder:** Wie lautet die Jacobi-Gleichung? Was ist ein Jacobi-Feld (JF)? Wie kann man ein JF konstruieren? Was kann man über die Existenz von JF längs Geos sagen? Wie sehen JF auf der 2-Sphäre aus; und wie in Mf konstanter Krümmung? Wie hängen JF mit dem Differential der Exponential-Abbildung zusammen?

**7. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume:** Wie wird eine zusammenhängende RMf  $M$  zu einem metrischen Raum? Wieso stimmt die ursprünglich auf  $M$  gegebene Topologie mit derjenigen des metrischen Raumes  $(M, d)$  überein? Wie zeigt man, dass der Durchmesser einer kompakten RMf beschränkt ist? Gilt die Umkehrung? Was heißt geodätisch vollständig? Was besagt der Satz von Hopf-Rinow? Was sind die wesentlichen Beweisschritte? Was versteht man unter dem Schnittort eines Punktes  $p$  einer RMf? Kann der Schnittort für alle Punkte leer sein? Geben Sie drei Beispiele von Schnittorten? Was besagt der "Zerlegungssatz"? Anwendung?