Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$)
Auf der topologischen Mannigfaltigkeit $X := \mathbb{R}$ werden durch die Karten

$$\varphi : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad \psi : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

zwei Atlanten $A_1 = \{\varphi\}$ und $A_2 = \{\psi\}$ definiert; diese induzieren jeweils eine differenzierbare Struktur $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ verschiedene differenzierbare Strukturen auf X sind, aber die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A}_1)$ und $(X, \mathcal{A}_2)$ dennoch diffeomorph sind.

Aufgabe 2 (Pullback-Struktur)

(a) Sei M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf M, sodass f ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N wird.

(b) Kann man auf dem Einheitswürfel (als Teilraum des $\mathbb{R}^n$)

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{x_1, \dots, x_n\} = 1\}$$

eine differenzierbare Struktur $\mathcal{A}$ definieren, sodass $(W, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 3 (Reell projektiver Raum)
Sei $P^n\mathbb{R}$ der n-dimensionale reell projektive Raum. Sei $U_i := \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] : x_i \neq 0\} \subset P^n\mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n+1$.

Zeigen Sie, dass der Atlas $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_{n+1}, \varphi_{n+1})\}$ mit den Karten

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

ein differenzierbarer Atlas von $P^n\mathbb{R}$ ist.