Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Schnittkrümmung)
Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\sigma \in T_pM$ ein 2-dimensionaler Unterraum mit Basis $\{u, v\}$. Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung

$$K(p, \sigma) := \frac{\langle R(u,v)u, v\rangle}{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}$$

wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der Basis.

Aufgabe 2 (Die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(n)$)
Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ist die Zusammenhangskomponente von $\mathrm{O}(n)$, die die Einheitsmatrix E enthält.

(b) $\mathrm{SO}(n)$ ist eine Lie-Gruppe.

(c) Für alle $P \in \mathrm{SO}(n)$ gilt $T_P\mathrm{SO}(n) = \{PX : X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X + X^\top = 0\}$.

(d) Für $P \in \mathrm{SO}(n)$, $X, Y \in T_P\mathrm{SO}(n)$ wird durch

$$g_P(X, Y) := \mathrm{Spur}(P^{-1}X(P^{-1}Y)^\top)$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathrm{SO}(n)$ definiert.

(e) Diese Riemannsche Metrik ist biinvariant, d.h. für alle $A, P \in \mathrm{SO}(n)$ und $X, Y \in T_P\mathrm{SO}(n)$ gilt

$$g_{AP}(AX, AY) = g_P(X, Y) = g_{PA}(XA, YA).$$

Damit sind Linksmultiplikation $L_A : P \mapsto AP$ und Rechtsmultiplikation $R_A : P \mapsto PA$ Isometrien auf $\mathrm{SO}(n)$.

(f) Seien X, Y linksinvariante Vektorfelder auf $\mathrm{SO}(n)$, d.h. $X_P = P \cdot X_E$ und $Y_P = P \cdot Y_E$ für alle $P \in \mathrm{SO}(n)$. Dann gilt für den Levi-Civita-Zusammenhang D von $(\mathrm{SO}(n), g)$:

$$D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

(g) Die Geodätischen von $(\mathrm{SO}(n), g)$ durch E sind genau die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_X : \mathbb{R} &\to \mathrm{SO}(n) \\ t &\mapsto e^{tX} \end{aligned}$$

für $X \in T_E\mathrm{SO}(n)$, wobei $e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ die Matrixexponentialfunktion bezeichnet.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 3 (Ricci-Krümmung und Skalarkrümmung)
Seien $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus $A_p : T_pM \to T_pM$ sodass

$$\mathrm{Ricci}_p(v, w) = \langle A_p v, w\rangle_p$$

für alle $v, w \in T_pM$.

(b) Für die Skalarkrümmung $S(p)$ in p gilt

$$S(p) \;=\; \frac{n}{\mathrm{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \mathrm{Ricci}_p(v, v)\,\mathrm{d}v \;=\; \frac{n+2}{\mathrm{vol}(D^n)} \int_{D^n} \mathrm{Ricci}_p(v, v)\,\mathrm{d}v.$$

Hierbei bezeichnen S^{n-1} bzw. D^n die Einheitssphäre bzw. den Einheitsball in T_pM.

Hinweis: Verwenden Sie geeignet den Gaußschen Integralsatz.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 04. 07. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.