Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Torus)

(a) Zeigen Sie, dass es für den Rotationstorus

$$T_R := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r\cos t \\ 0 \\ r \sin t \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $0 < r < R$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_R$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass es für den flachen Torus $T_F := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_F$ gibt.

(c) Finden Sie einen Diffeomorphismus zwischen $(T_R, \mathcal{A}_R)$ und $(T_F, \mathcal{A}_F)$.

Aufgabe 2 (Produktmannigfaltigkeiten)

Seien $(M^m, \mathcal{A}_M)$ und $(N^n, \mathcal{A}_N)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}_M := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ und $\mathcal{A}_N := \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$.

Für alle $i, j \in I \times J$ sei $h_{ij} : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n},\ (p, q) \mapsto (\varphi_i(p), \psi_j(q))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{(U_i \times V_j, h_{ij}) : i \in I, j \in J\}$ ein differenzierbarer Atlas für $M \times N$ ist.

(b) Sei $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Finden Sie einen Diffeomorphismus vom Rotationstorus T_R auf die Produktmannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$.

Aufgabe 3 (Transformationsformel)

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $\varphi : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ Karten von M mit $p \in U \cap V$.

Weiter seien $x^i := u^i \circ \varphi$ bzw. $y^i := u^i \circ \psi$ die i-ten lokalen Koordinaten bzgl. φ bzw. ψ.

(a) Zeigen Sie, dass für $i = 1, \dots, n$ die Abbildung

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

ein Tangentialvektor an M in p ist.

(b) Beweisen Sie die Transformationsformel

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (u^j \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u^i}(\psi(p))\, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 02. 05. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.