Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Geometrischer Tangentialraum)
Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $c_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \to M$ ($i = 1, 2$) mit $c_1(0) = c_2(0) = p \in M$.

Die Kurven c_1 und c_2 heißen *äquivalent* ($c_1 \sim c_2$) falls eine Karte (U, φ) von M existiert mit $p \in U$ sodass

$$\frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^∞-Kurven c mit $c(0) = p$ definiert. Man nennt die Äquivalenzklassen dieser Relation *geometrische Tangentialvektoren* an M in p. Die Menge der geometrischen Tangentialvektoren $T_p^{\mathrm{geo}}M$ in p heißt *geometrischer Tangentialraum* von M in p.

(b) Sei (U, φ) eine Karte um $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$A_\varphi : T_p^{\mathrm{geo}}M \to \mathbb{R}^n, [c] \mapsto \frac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0)$$

bijektiv ist.

(c) $T_p^{\mathrm{geo}}M$ erhält durch A_φ die Struktur eines n-dimensionalen reellen Vektorraums, durch die Additionsvorschrift

$$a \cdot [c_1] + b \cdot [c_2] := A_\varphi^{-1}(a \cdot A_\varphi([c_1]) + b \cdot A_\varphi([c_2])).$$

Zeigen Sie, dass diese Vektorraumstruktur nicht von der Wahl von φ abhängig ist.

(d) Für $[c] \in T_p^{\mathrm{geo}}M$ sei

$$X_{[c]} : C^\infty(p) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \frac{d(g \circ c)}{dt}(0).$$

Zeigen Sie, dass $X_{[c]}$ ein Tangentialvektor ist, und dass die Abbildung $[c] \mapsto X_{[c]}$ ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $T_p^{\mathrm{geo}}M$ und T_pM ist.

Aufgabe 2 (Spezielle differenzierbare Abbildungen)

(a) Seien M_1, M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i,\ (p_1, p_2) \mapsto p_i$$

für $i = 1, 2$ Submersionen sind.

(b) Sei $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$. Zeigen Sie, dass f eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 3 (Untermannigfaltigkeiten)
Sei $(N, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$, versehen mit der Teilraumtopologie, heißt *m-dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit* von N, falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ gibt, sodass $p \in U$ und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}).$$

Jede solche Karte (U, φ) nennt man eine *an M angepasste Karte*. Sei weiter $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$.

Zeigen Sie, dass

$$A_M := \{(U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A} \text{ ist an } M \text{ angepasste Karte}\}$$

ein differenzierbarer Atlas von M ist. Damit wird M zu einer m-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit.