Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Tangentialbündel)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und TM das Tangentialbündel von M. Zeigen Sie:

(a) Die Projektion $\pi : TM \to M,\ (p, v) \mapsto p$ ist eine Submersion.

(b) Der *Nullschnitt* $\sigma : M \to TM,\ p \mapsto (p, 0)$ ist eine Einbettung.

Aufgabe 2 (Heisenberg-Gruppe)
Eine *Lie-Gruppe* ist eine Struktur $(G, *, \mathcal{A})$, wobei $(G, *)$ Gruppe ist und $(G, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sodass Gruppenmultiplikation und Inversenbildung differenzierbare Abbildungen bzgl. $\mathcal{A}$ sind.

(a) Zeigen Sie, dass die *Heisenberg-Gruppe*

$$H_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$$

eine Lie-Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{I_3}H_3(\mathbb{R})$ von $H_3(\mathbb{R})$, wobei I_3 die $3{\times}3$-Einheitsmatrix ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den geometrischen Tangentialraum.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit der Operation

$$[X, Y] := XY - YX$$

zu einer Lie-Algebra wird.

Aufgabe 3 (Lie-Algebra der Derivationen)
Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D}M$ der Raum der Derivationen auf $C^\infty(M)$, d.h. die Menge der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $V : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die die Leibnizregel

$$V(fg) = f \cdot V(g) + g \cdot V(f)$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}M$ mit der Operation

$$[V, W] := V \circ W - W \circ V$$

zu einer Lie-Algebra wird.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 16. 05. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.