Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

# Differentialgeometrie

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1** (Riemannsche Isometrien)

(a) Zeigen Sie, dass ein Diffeomorphismus $F : (M,g) \mapsto (N,h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten genau dann eine Isometrie ist, wenn $F$ die Länge jeder differenzierbaren Kurve $c : [a,b] \to M$ invariant lässt: $L(c) = L(F \circ c)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Isometrien $F : M \to M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bilden, genannt die *Isometriegruppe* $\mathrm{Isom}(M)$.

(c) Die *hyperbolische Ebene* $(\mathbb{H}^2, g)$ ist gegeben durch die Menge $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$, die Karte $\varphi : x + iy \mapsto (x,y)$ und das Skalarprodukt $g$, das in jedem Tangentialraum $T_z\mathbb{H}^2$ bezüglich der Koordinatenbasis von $\varphi$ die Darstellungsmatrix $\frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ besitzt.

Zeigen Sie, dass für beliebige $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ die *Möbius-Transformation*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ ist.

**Aufgabe 2** ($n$-dimensionale hyperbolische Geometrie)
Mit dem *Lorentz-Minkowski-Produkt*

$$* : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x_1y_1 + \ldots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$$

wird die differenzierbare Untermannigfaltigkeit

$$\mathbb{L}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x * x = -1,\ x_{n+1} > 0\}$$

von $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Für $p \in \mathbb{L}^n$ und $u, v \in T_p\mathbb{L}^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1}$ sei $g_p(u,v) := u * v$.

Zeigen Sie, dass $g_p$ ein Skalarprodukt auf $T_p\mathbb{L}^n$ definiert und dass $(\mathbb{L}^n, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: Diese Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt auch das *Hyperboloidmodell* des $n$-dimensionalen hyperbolischen Raums.

**Aufgabe 3** ($n$-dimensionale sphärische Geometrie)
Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die $n$-Sphäre mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik $g_S$. Zeigen Sie:

(a) Die Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n,\ p \mapsto -p$ ist eine Riemannsche Isometrie.

(b) $\mathrm{Isom}(S^n, g_S) \cong O(n+1)$.

---

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 23. 05. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.