Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Affiner Zusammenhang)
Seien $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei D der kanonische, von $\mathbb{R}^2$ induzierte Zusammenhang auf M. Die Vektorfelder E_1 und E_2 seien die Basisfelder bezüglich der Karte $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id})$. Weiter seien die Vektorfelder X und Y auf M definiert durch

$$X(p) := -yE_1(p) + xE_2(p), \quad Y(p) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xE_1(p) + yE_2(p))$$

für $p = (x, y) \in M$.

Berechnen Sie $D_X Y$ und $D_Y X$.

Aufgabe 2 (Parallelverschiebung)
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und D ein affiner Zusammenhang auf M. Weiter sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve und $c\|_a^b : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ die Parallelverschiebung längs c.

(a) Zeigen Sie, dass $c\|_a^b$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung im Allgemeinen nicht nur von $c(a)$ und $c(b)$ abhängig ist.

Aufgabe 3 (Koszul-Formel)
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}M$ ein eindeutiges Vektorfeld $D_Y X \in \mathcal{V}M$ gibt, sodass für alle Vektorfelder Z in $\mathcal{V}M$ die Koszul-Formel

$$\langle Z, D_Y X\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle)$$

erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $D : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M,\ (X, Y) \mapsto D_X Y$ ein affiner Zusammenhang auf M ist.

(c) Zeigen Sie, dass D metrisch und torsionsfrei ist.

Diese Aufgabe beweist Existenz des Levi-Civita-Zusammenhangs, also sollte die Existenz des Levi-Civita-Zusammenhangs zur Lösung dieser Aufgabe nicht verwendet werden.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 30. 05. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.