

Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda \in C^\infty(M)$ auf ganz M positiv. Dann ist $\tilde{g} := \lambda \cdot g$ ebenfalls eine Riemannsche Metrik auf M .

- (a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ von \tilde{g} in Abhängigkeit von den Christoffel-Symbolen Γ_{ij}^k von g .
- (b) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 aus Aufgabe 1, Blatt 5, bezüglich der dort gegebenen Karte φ .

Aufgabe 2 (Isometrien und Geodätische)

Seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Zusammenhängen D bzw. D' . Weiter sei $F : M \rightarrow N$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass F den Levi-Civita-Zusammenhang in folgendem Sinne erhält:

$$dF(D_X Y) = D'_{dF(X)} dF(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{V}M.$$

Zeigen Sie weiter, dass Isometrien Geodätische auf Geodätische abbilden.

Hinweis: Zeigen Sie, dass \tilde{D} gegeben durch $\tilde{D}_X Y := dF(D_{dF^{-1}(X)} dF^{-1}(Y))$ ein Levi-Civita-Zusammenhang auf N ist.

Aufgabe 3 (Geometrie der hyperbolischen Ebene)

Zeigen Sie durch Lösung des geodätischen Differentialgleichungssystems, dass Geodätische in der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 , als Teilmengen von \mathbb{C} gesehen, Halbkreise bzw. Halbgeraden in \mathbb{C} sind, die senkrecht zur reellen Achse stehen.