Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Differentialgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Energie einer Kurve)
Sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Die *Energie* von c ist definiert als

$$E(c) = \int_a^b \frac{1}{2} \|c'(t)\|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass für die Länge $L(c)$ gilt:

$$L(c)^2 \leq 2(b - a) \cdot E(c)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 2 (Kürzeste Wege sind Geodätische)
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (φ, U) eine Karte. Sei

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

die lokale Darstellung einer Kurve $\gamma : [a, b] \to M$.

Fakt: Minimiert eine Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ das Variationsintegral

$$F(x) = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t) \, \mathrm{d}t,$$

so gelten die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass γ genau dann Geodätische ist, wenn $\varphi \circ \gamma$ die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Energie $E(\gamma)$ erfüllt.

Folgern Sie daraus, dass lokal kürzeste Kurven, die nach Bogenlänge parametrisiert sind, Geodätische sind.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 3 (Satz von Clairaut)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei C^∞-Funktionen mit $f > 0$ und $f'^2 + g'^2 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$p(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

eine Immersion ist. Das Bild von p heißt *Rotationsfläche* der Kurve $t \mapsto (f(t), g(t))$, und die Bilder $p(\{u_0\} \times \mathbb{R})$ und $p(\mathbb{R} \times \{v_0\})$ für konstante u_0, v_0 heißen *Meridiane* bzw. *Breitenkreise* dieser Rotationsfläche.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, sodass $p|_U$ eine Einbettung ist. Zeigen Sie, dass die von $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik auf $S := p(U)$ bezüglich der Karte $\varphi := (p|_U)^{-1}$ folgende lokale Koeffizienten besitzt:

$$g_{11}(u, v) = f(v)^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22}(u, v) = f'(v)^2 + g'(v)^2.$$

(c) Sei $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ eine Geodätische auf S. Bestimmen Sie lokal bezüglich φ die geodätischen Differentialgleichungen für γ.

(d) Sei $r(t)$ der Radius des Breitenkreises von S durch $\gamma(t)$, und sei $\beta(t)$ der Winkel zwischen diesem Breitenkreis und dem Tangentialvektor $\dot\gamma(t)$. Zeigen Sie mithilfe der lokalen Differentialgleichungen, dass $r \cdot \cos \beta$ konstant ist.