Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

# Differentialgeometrie

## Übungsblatt 9

**Aufgabe 1** (Metrische Parallelverschiebung)
Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Weiter sei $c\|_a^b$ die Parallelverschiebung entlang $c$ bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs.

Zeigen Sie, dass $c\|_a^b$ eine Isometrie ist.

**Aufgabe 2** (Starrheit von Isometrien)
Sei $(M, g)$ eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien $\varphi, \psi : M \to M$ Isometrien und $p \in M$ ein Punkt sodass $\varphi(p) = \psi(p)$ und $d_p\varphi = d_p\psi$.

Zeigen Sie $\varphi = \psi$.

**Aufgabe 3** (Geodätisches Feld)
Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $D$ der Levi-Civita-Zusammenhang darauf. Seien $V, W \in T(TM)$ Tangentialvektoren am Punkt $(p, v) \in TM$. Weiter seien

$$\alpha : t \mapsto (p(t), v(t)), \beta : t \mapsto (q(s), w(s))$$

differenzierbare Kurven mit $p(0) = q(0) = p, v(0) = w(0) = v$ und $\alpha'(0) = V, \beta'(0) = W$.

Auf $T_{(p,v)}(TM)$ wird jetzt ein Skalarprodukt definiert durch

$$\langle V, W\rangle_{(p,v)} := g(d\pi(V), d\pi(W))_p + g(D_{\dot{p}}v(0), D_{\dot{q}}w(0))_p$$

wobei $\pi : TM \to M, (q, w) \mapsto q$ die kanonische Projektion bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dasss $\langle\cdot, \cdot\rangle$ wohldefiniert ist und $TM$ zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit macht.

(b) Ein Vektor in $T_{(p,v)}(TM)$ heißt *horizontal*, falls er bezüglich $\langle\cdot, \cdot\rangle$ orthogonal zu Kern $d_{(p,v)}\pi$ ist. Eine Kurve in $TM$ heißt *horizontal*, falls alle ihre Tangentialvektoren horizontal sind.

Zeigen Sie, dass die differenzierbare Kurve $t \mapsto (p(t), v(t))$ genau dann horizontal ist, wenn das Vektorfeld $v(t)$ parallel entlang der Kurve $p(t)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass das geodätische Feld von $M$ überall horizontal ist.

---

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am **Mittwoch, 20. 06. 2018, um 15:45 Uhr** besprochen.