Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

11. Juli 2018

Probeklausur Differentialgeometrie (SS 2018)

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung: Semester:

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die *Nummer der Aufgabe* sowie *Ihren Namen* schreiben.

Zur Bewertung: Jede Aufgabe wird mit bis zu 6 Punkten bewertet, so dass Sie insgesamt 24 Punkte erhalten können. Zum Bestehen der Klausur genügen 10 Punkte.

Punkte (wird von den Prüfern ausgefüllt)					
1	2	3	4	Σ	**Note**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $J := \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

Die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ ist die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ bestehend aus den Matrizen $A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ sodass $A^\top J A = J$ gilt.

Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{E_{2n}}\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ im Punkt E_{2n} von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $(\mathbb{R},h)$ der eindimensionale euklidische Raum mit Standardmetrik h. Sei $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine differenzierbare Funktion.

Sei auf $\tilde{M} := M \times \mathbb{R}$ eine Bilinearform $\tilde{g}$ definiert durch

$$\tilde{g}_{(p,t)}((v_1,w_1),(v_2,w_2)) := f(t)^2 g_p(v_1,v_2) + h_t(w_1,w_2)$$

für $v_1, v_2 \in T_pM$ und w_1, w_2 in $T_t\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik auf $\tilde{M}$ ist.

b) Zeigen Sie: Für jedes $p \in M$ ist $c : \mathbb{R} \to \tilde{M},\ s \mapsto (p,s)$ eine Geodätische von $\tilde{M}$.

c) Welche Bedingung muss f erfüllen, damit für jede Geodätische γ von M und jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{\gamma} : s \mapsto (\gamma(s),t)$ eine Geodätische von $\tilde{M}$ ist?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Sphäre S^2 sei mit der Standardmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen. Die Punkte $A := (0,0,1)$, $B := (0,1,0)$, $C := (1,0,0)$ in S^2 definieren ein geodätisches Dreieck ABC.

Ein Vektor $v \in T_A S^2$ wird längs der Geodätischen $\overline{AB}$, dann $\overline{BC}$, dann $\overline{CA}$ parallelverschoben; das Ergebnis ist ein Vektor $\tilde{v} \in T_A S^2$.

Bestimmen Sie $\langle v, \tilde{v}\rangle_A$ in Abhängigkeit von v.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien X, Y zwei Vektorfelder auf M sodass in jedem Punkt $p \in M$ die Tangentialvektoren X_p und Y_p eine Basis von T_pM bilden.

Die Integralkurven von X und Y seien Geodätische, d.h. $D_X X = D_Y Y = 0$, und schneiden sich in einem konstanten Winkel α, d.h. $\langle X, Y\rangle = \cos(\alpha) \cdot \|X\| \cdot \|Y\|$.

a) Geben Sie ein Beispiel (M, X, Y) an, das diese Eigenschaften erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass M flach ist (d.h. die Schnittkrümmung von M ist konstant 0).

Hinweis: Ersetzen Sie zunächst X und Y durch $\|X\|^{-1}X$ bzw. $\|Y\|^{-1}Y$.

Lösung zu Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \mathbb{R}^{2n\times 2n}, A \mapsto A^\top JA$. Dann ist $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(J)$.

Für alle $M \in T_{E_{2n}}\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ ist

$$\begin{aligned} d_{E_{2n}}f(M) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(E_{2n}+tM) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (E_{2n}+tM)^\top J(E_{2n}+tM) \\ &= M^\top JE_{2n} + E_{2n}^\top JM = M^\top J + JM \end{aligned}$$

also ist $\mathrm{Kern}\, d_{E_{2n}}f = \{M \in T_{E_{2n}}\mathbb{R}^{2n\times 2n} = \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid M^\top J + JM = 0\}$.

Behauptung: $T_{E_{2n}}\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Kern}\, d_{E_{2n}}f$.

Beweis „$\subseteq$“: Sei $V \in T_{E_{2n}}\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ beliebig. Sei $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = E_{2n}$ und $\dot c(0) = V$. Für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ist nun $f(c(t)) = J$. Damit ist

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(c(t)) = d_{c(0)}f(\dot c(0)) = d_{E_{2n}}f(V)$$

also liegt V im Kern von $d_{E_{2n}}f$.

Beweis „$\supseteq$“: Sei $W \in \mathrm{Kern}\, d_{E_{2n}}f$. Gesucht ist eine Kurve $c : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ sodass $c(0) = E_{2n}$ und $\dot c(0) = W$.

Da $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ eine Matrixgruppe ist, ist $c(t) := e^{tW}$ ein naheliegender Kandidat für diese Kurve (hier bezeichnet $e^M := \sum_{i=0}^\infty M^i/i!$ die Matrixexponentialfunktion).

Es gilt $\dot c(t) = We^{tW} = e^{tW}W$, also ist $c(0) = e^{0W} = E_{2n}$ und $\dot c(0) = We^{0W} = W$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $e^{tW} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ liegt für alle t.

Beobachtung: Da $W \in \mathrm{Kern}\, d_{E_{2n}}f$ liegt, ist $W^\top J + JW = 0$, also ist $W^\top J = -JW$. Per Induktion über i erhält man

$$(W^\top)^i J = (W^\top)^{i-1}W^\top J = -(W^\top)^{i-1}JW = -(-1)^{i-1}JW^{i-1}W = (-1)^i JW^i.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$\begin{aligned} (e^{tW})^\top J(e^{TW}) &= \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(tW)^i}{i!}\right)^\top J \left(\sum_{j=0}^\infty \frac{(tW)^j}{j!}\right) = \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(tW^\top)^i}{i!}\right) J \left(\sum_{j=0}^\infty \frac{(tW)^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^\infty \frac{t^i}{i!}\frac{t^j}{j!}(W^\top)^i JW^j = \sum_{i,j=0}^\infty \frac{t^i}{i!}\frac{t^j}{j!}(-1)^i JW^iW^j = J\left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(-tW)^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^\infty \frac{(tW)^j}{j!}\right) \\ &= Je^{-tW}e^{tW} = J. \end{aligned}$$

Damit liegt $c(t) = e^{tW}$ in $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ wie gewünscht, also liegt $W = \dot c(0)$ in $T_{E_{2n}}\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$.

Damit ist die Behauptung bewiesen, und es folgt

$$T_{E_{2n}}\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Kern}\, d_{E_{2n}}f = \{M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid M^\top J + JM = 0\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Da $\tilde{g}$ auf differenzierbare Weise aus den differenzierbaren Abbildungen f, g, h komponiert ist, ist $\tilde{g}$ selbst differenzierbar.

Da g_p und h_t symmetrisch sind, ist auch $\tilde{g}_{(p,t)}$ symmetrisch, für alle $(p,t) \in \tilde{M}$.

Für alle $(p,t) \in \tilde{M}$ ist $\tilde{g}_{(p,t)}$ bilinear, denn $\tilde{g}_{(p,t)}$ ist Komposition der linearen Projektionen $(v,w) \mapsto v$ und $(v,w) \mapsto w$ mit den Bilinearformen $f(t)^2 g_p$ und h_t.

$\tilde{g}$ ist nichtnegativ, denn f, g und h sind alle nichtnegativ.

Es bleibt noch positive Definitheit von $\tilde{g}_{(p,t)}$ zu zeigen. Dafür sei $(v,w) \in T_pM \times T_t\mathbb{R} = T_{(p,t)}\tilde{M}$ beliebig, und sei $\tilde{g}_{(p,t)}((v,w),(v,w)) = 0$. Da g_p und h_t nichtnegativ sind und $f(t)^2$ positiv ist, folgt $g_p(v,v) = 0 = h_t(w,w)$, und aus der positiven Definitheit von g_p und h_t folgt $v = 0$ und $w = 0$, damit auch $(v,w) = 0$. Dies bedeutet, dass $\tilde{g}_{(p,t)}$ positiv definit ist.

Zusammengefasst: $\tilde{g}_{(p,t)}$ ist symmetrische, positiv definite Bilinearform, die differenzierbar von (p,t) abhängig ist. Also ist $\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik auf $\tilde{M}$.

b) Sei $(p,t) \in \tilde{M}$, und sei φ Karte von M um p. Dann ist $\tilde{\varphi} := \varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ eine Karte der Produktmannigfaltigkeit $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ um (p,t).

Seien $V_1, \ldots, V_n$ die Koordinatenbasisvektoren von T_pM bezüglich φ, und seien $\tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_{n+1}$ die Koordinatenbasisvektoren von $T_{(p,t)}\tilde{M}$ bezüglich $\tilde{\varphi}$. Dann gilt $\tilde{V}_{n+1} = (0,1)$ und $\tilde{V}_i = (V_i, 0)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Seien $g_{ij} = g(V_i, V_j)$ die Koeffizienten von g bezüglich φ (für $i,j = 1,\ldots,n$) und $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)$ die Koeffizienten von $\tilde{g}$ bezüglich $\tilde{\varphi}$ (für $i,j = 1,\ldots,n+1$).

Seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole für g bezüglich φ, und seien $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole für $\tilde{g}$ bezüglich $\tilde{\varphi}$.

Durch Einsetzen in die Definition von $\tilde{g}$ folgt

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{\varphi}(p,t)) = \tilde{g}_{(p,t)}(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j) = \begin{cases} f(t)^2 g_p(V_i, V_j) = f(t)^2 g_{ij}(\varphi(p)) & \text{falls } i,j \leq n \\ h_t(1,1) = 1 & \text{falls } i,j = n+1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{also } ((\tilde{g}_{ij}))_{ij} = \begin{pmatrix} f(t)^2((g_{ij}))_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und deshalb } ((\tilde{g}^{ij}))_{ij} = \begin{pmatrix} f(t)^{-2}((g^{ij}))_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun c wie in der Aufgabenstellung. Sei $(x^1(s), \ldots, x^{n+1}(s)) := \tilde{\varphi}(c(s)) = (\varphi(p), s)$. Dann sind $\dot{x}^1 = \ldots = \dot{x}^n = 0$ und $\dot{x}^{n+1} = 1$.

Zu zeigen ist nun, dass die x^i die geodätischen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\ddot{x}^k = -\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n+1.$$

Bei Einsetzen der $\dot{x}^k = \delta_{k,n+1}$ und $\ddot{x}^k = 0$ fallen die meisten Terme weg und es bleibt folgende Gleichung zu zeigen:

$$0 = -\tilde{\Gamma}^k_{n+1,n+1} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n+1.$$

Dies stimmt, denn

$$\Gamma^k_{n+1,n+1} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{g}^{km} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{m,n+1}}{\partial u^{n+1}} + \frac{\partial \tilde{g}_{n+1,m}}{\partial u^{n+1}} - \frac{\partial \tilde{g}_{n+1,n+1}}{\partial u^m} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{g}^{km}(0+0-0) = 0$$

weil die $\tilde{g}_{m,n+1}$ und $\tilde{g}_{n+1,m}$ alle konstant 0 oder 1 sind.

c) Behauptung: „f ist konstant" ist die gesuchte Bedingung, d.h. folgende Aussagen sind äquivalent:

i) f ist konstant.

ii) für jede Geodätische γ von M und jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{\gamma} : s \mapsto (\gamma(s), t)$ eine Geodätische von $\tilde{M}$ ist.

„ii) $\Rightarrow$ i)": Es gelte ii). Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig, sei γ eine beliebige nichtkonstante Geodätische. Sei $\tilde{\gamma} : s \mapsto (\gamma(s), t)$, und sei $(x^1(s), \ldots, x^{n+1}(s)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}(s)) = (\varphi(\gamma(s)), t)$ für eine Karte φ von M um $\gamma(s_0)$ und die entsprechende Karte $\tilde{\varphi} := \varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ von $\tilde{M}$ um $\tilde{\gamma}(s_0)$.

Da x^{n+1} konstant t ist, ist $\dot{x}^{n+1} = 0 = \ddot{x}^{n+1}$. Wegen ii) ist auch $\tilde{\gamma}$ eine nichtkonstante Geodätische, also gilt

$$\begin{aligned}
0 = \ddot{x}^{n+1} &= -\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}^{n+1}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{wegen geod. Dgl. für } \tilde{\gamma} \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\Gamma}^{n+1}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{wegen } \dot{x}^{n+1} = 0 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{g}^{m,n+1} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial u^m} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{i,n+1}}{\partial u^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{j,n+1}}{\partial u^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial u^{n+1}} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{wegen } \tilde{g}^{m,n+1} = \delta_{m,n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial u^{n+1}} \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{weil } \tilde{g}_{i,n+1} \text{ konstant sind} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial}{\partial u^{n+1}} \right|_{u=x} f(u^{n+1})^2 g_{ij}(u^1, \ldots, u^n) \right) \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{nach Def. von } \tilde{g} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} 2 f'(t) f(t) g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j && \text{weil } x = (\gamma(s), t) \\
&= f'(t) f(t) \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle
\end{aligned}$$

Da $f(t)$ und $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ ungleich 0 sind, muss also $f'(t) = 0$ sein. Damit ist f konstant.

„i) $\Rightarrow$ ii)": Es gelte i). Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig, sei γ eine beliebige Geodätische. Sei $\tilde{\gamma} : s \mapsto (\gamma(s), t)$, und sei $(x^1(s), \ldots, x^{n+1}(s)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}(s)) = (\varphi(\gamma(s)), t)$ für eine

Karte φ von M um $\gamma(s_0)$ und die entsprechende Karte $\tilde{\varphi} := \varphi \times \mathbf{id}_{\mathbb{R}}$ von $\tilde{M}$ um $\tilde{\gamma}(s_0)$.

Zu zeigen ist

$$\ddot{x}^k = -\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$$

für alle k.

Da x^{n+1} konstant t ist, ist $\dot{x}^{n+1} = 0 = \ddot{x}^{n+1}$.

Da $-\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_{ij}^{n+1} \dot{x}^i \dot{x}^j = f'(t)f(t)\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle$ ist (mit derselben Begründung wie in die andere Richtung, ist $-\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_{ij}^{n+1} \dot{x}^i \dot{x}^j = f'(t)f(t)\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = 0 = \ddot{x}^{n+1}$. Damit ist der Fall $k = n+1$ bewiesen.

Sei also $1 \leq k \leq n$. Für alle $1 \leq i,j \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+1} \tilde{g}^{km}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial u^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \tilde{g}^{km}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial u^m}\right) && \text{da } \tilde{g}^{k,n+1} = 0 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} f^{-2} g^{km}\left(\frac{\partial f^2 g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial f^2 g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial f^2 g_{ij}}{\partial u^m}\right) && \text{da } \tilde{g}_{ij} = f^2 g_{ij},\ \ \tilde{g}^{ij} = f^{-2} g^{ij} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) && \text{da } f \text{ konstant} \\
&= \Gamma_{ij}^k,
\end{aligned}$$

und für $i > n$ oder $j > n$ gilt $\dot{x}^i \dot{x}^j = 0$, also gilt

$$-\sum_{i,j=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = \ddot{x}^k$$

nach den geodätischen Differentialgleichungen für γ.

Damit erfüllt $\tilde{\gamma}$ die geodätischen Differentialgleichungen bzgl. $\tilde{\varphi}$. Da s_0 beliebig war, gilt $D_{\dot{\tilde{\gamma}}}\dot{\tilde{\gamma}}(s_0) = 0$ für alle s_0 im Definitionsbereich von $\tilde{\gamma}$, also ist $\tilde{\gamma}$ Geodätische in $\tilde{M}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Auf S^2 sei die Kurve $c : [0, \pi/2] \to S^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ von A nach B gegeben. Nun parametrisiert c ein Viertel eines Großkreises von S^2 nach Bogenlänge, also ist c nach Vorlesung die Geodätische $\overline{AB}$ auf S^2.

Sei V_1 ein Vektorfeld längs c gegeben durch $V_1(s) := \dot{c}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$. Da c Geodätische ist, ist $V_1 = \dot{c}$ Parallelfeld entlang c, d.h. $D_{\dot{c}} V_1 = 0$. (Hier bezeichnet D den Levi-Civita-Zusammenhang von S^2.)

Sei V_2 ein weiteres Vektorfeld längs c, gegeben durch $V_2(s) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für alle s ist $V_2(s)$ normiert und orthogonal zu $V_1(s)$, also spannen $V_1(s)$ und $V_2(s)$ den Tangentialraum $T_{c(s)} S^2$ auf.

Behauptung: V_2 ist ebenfalls Parallelfeld längs C.

[Beweis: Da D mit der Metrik verträglich ist, gilt für beliebige Vektorfelder V, W längs c dass

$$\frac{d}{ds} \langle V, W \rangle = \langle D_{\dot{c}} V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, D_{\dot{c}} V_2 \rangle.$$

Also ist $0 = \frac{d}{ds} 0 = \frac{d}{ds} \langle V_1, V_2 \rangle = \langle D_{\dot{c}} V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, D_{\dot{c}} V_2 \rangle = \langle V_1, D_{\dot{c}} V_2 \rangle$

und $0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} \langle V_2, V_2 \rangle = \langle D_{\dot{c}} V_2, V_2 \rangle + \langle V_2, D_{\dot{c}} V_2 \rangle = 2 \langle V_2, D_{\dot{c}} V_2 \rangle$,

also steht $D_{\dot{c}} V_2(s)$ senkrecht auf sowohl $V_1(s)$ und $V_2(s)$ für alle s, aber da $V_1(s)$ und $V_2(s)$ zusammen $T_{c(s)} S^2$ aufspannen, muss $D_{\dot{c}} V_2(s) = 0$ sein.]

[Alternativer Beweis: Parallelverschiebung von $c(0)$ nach $c(s)$ längs c ist lineare Isometrie (siehe Übungsblatt 8), und Isometrien bilden Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.

Sei $\tilde{V}_2(s)$ das Parallelfeld auf c mit $\tilde{V}_2(0) = V_2(0)$. Da $V_1(0), \tilde{V}_2(0)$ ONB von $T_A S^2$ ist, ist auch $\{V_1(s), \tilde{V}_2(s)\}$ als Parallelverschiebung einer ONB eine ONB von $T_{c(s)} S^2$. Aber $\{V_1(s), V_2(s)\}$ ist auch eine ONB von $T_{c(s)} S^2$, also gilt $V_2(s) = \pm \tilde{V}_2(s)$ für alle s. Da V_2 und $\tilde{V}_2$ stetig von s abhängen und $\tilde{V}_2(0) = V_2(0)$ ist, muss $V_2(s) = +\tilde{V}_2(s)$ für alle s sein, also ist $V_2 = \tilde{V}_2$ Parallelfeld.]

Parallelverschiebung längs $\overline{AB}$ bildet also $V_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $V_1(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $V_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $V_2(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ab, also hat die Parallelverschiebung p_{AB} längs $\overline{AB}$

folgende Form:

$$p_{AB} : T_A S^2 \to T_B S^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}.$$

Durch Koordinatenvertauschung erhalten wir für die Parallelverschiebungen p_{BC} längs $\overline{BC}$ und p_{CA} längs $\overline{CA}$:

$$p_{BC} : T_B S^2 \to T_C S^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

und

$$p_{CA} : T_C S^2 \to T_A S^2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -z \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Parallelverschiebung eines beliebigen Vektors $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ entlang $\overline{AB}$, dann $\overline{BC}$, dann $\overline{CA}$ ist also

$$\tilde{v} = p_{CA}(p_{BC}(p_{AB}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}))) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit ist $\langle v, \tilde{v} \rangle = x \cdot y - y \cdot x + 0 \cdot 0 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Beispiel: Sei $M = \mathbb{E}^2$ die euklidische Ebene, und seien $X := \frac{\partial}{\partial x}$ und $Y := \frac{\partial}{\partial y}$ die Standardkoordinatenvektorfelder. Die Integralkurven von X bzw. Y sind nach Bogenlänge parametrisierte Geraden parallel zu den Koordinatenachsen, also Geodätische. Damit ist $D_X X = 0 = D_Y Y$ und $\langle X, Y \rangle = 0 = \cos(\pi/2)\|X\|\|Y\|$.

b) Seien M, X, Y und α wie in der Aufgabenstellung. Dem Hinweis folgend, sei $X' := X\|X\|^{-1}$ und $Y' := Y\|Y\|^{-1}$. Da X und Y Basisvektorfelder sind, sind X' und Y' wohldefiniert und ebenfalls Basisvektorfelder.

Es gilt $\langle X', Y' \rangle = \langle X\|X\|^{-1}, Y\|Y\|^{-1} \rangle = \|X\|^{-1}\|Y\|^{-1}\langle X, Y \rangle = \cos(\alpha)$.

Sei $p \in M$ beliebig, und sei $c : I \to M$ eine Integralkurve von X mit $c(0) = p$. Nach Voraussetzung an X ist c Geodätische, also hat c konstante Geschwindigkeit $k = \|\dot{c}(t)\| = \|X_{c(t)}\| \neq 0$. Sei nun $\tilde{c} : kI \to M,\ t \mapsto c(k^{-1}t)$.

Dann ist $\dot{\tilde{c}}(t) = k^{-1}\dot{c}(k^{-1}t) = \|X_{c(k^{-1}t)}\|^{-1} X_{c(k^{-1}t)} = X'_c(k^{-1}t) = X'_{\tilde{c}(t)}$, also ist $\tilde{c}$ Integralkurve von X' mit $\tilde{c}(0) = p$.

Da $(D_{\dot{\tilde{c}}}\dot{\tilde{c}})(t) = (D_{k^{-1}\dot{c}} k^{-1}\dot{c})(k^{-1}t) = k^{-2}(D_{\dot{c}}\dot{c})(k^{-1}t) = 0$, ist $\tilde{c}$ ebenfalls Geodätische.

Da p beliebig war, sind alle Integralkurven von X' Geodätische, also ist $D_{X'}X' = 0$. Analog ist $D_{Y'}Y' = 0$.

Zusammenfassung des Bisherigen: X' und Y' sind normierte Basisvektorfelder auf M sodass $D_{X'}X' = 0 = D_{Y'}Y'$ und $\langle X', Y' \rangle = \cos(\alpha)$.

Da $\langle X', X' \rangle$ konstant 1 ist, ist

$$0 = \frac{1}{2} Y'\langle X', X' \rangle = \langle D_{Y'}X', X' \rangle.$$

Da $\langle X', Y' \rangle$ konstant $\cos(\alpha)$ ist und $0 = D_{Y'}Y'$, ist

$$0 = Y'\langle X', Y' \rangle = \langle D_{Y'}X', Y' \rangle + \langle X', D_{Y'}Y' \rangle = \langle D_{Y'}X', Y' \rangle.$$

Also ist das Vektorfeld $D_{Y'}X'$ sowohl zu X' als auch zu Y' orthogonal, aber X' und Y' sind Basisvektorfelder, also ist $D_{Y'}X' = 0$. Analog folgt auch $D_{X'}Y' = 0$.

Damit ist $[X', Y'] = D_{X'}Y' - D_{Y'}X' = 0$, also gilt

$$R(X', Y')X' = D_{Y'}D_{X'}X' - D_{X'}D_{Y'}X' + D_{[X',Y']}X' = D_{Y'}0 - D_{X'}0 + D_0 X' = 0.$$

Da X', Y' Basisvektorfelder von M sind, ist

$$K = K(X', Y') = \frac{\langle R(X', Y')X', Y' \rangle}{\langle X', X' \rangle\langle Y', Y' \rangle - \langle X', Y' \rangle^2} = \frac{0}{1 - \cos(\alpha)^2} = 0.$$