Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dr. Michael Wiemeler

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 2 **Wintersemester 2012/13**

Aufgabe 1. Ableitungsregeln für vektorwertige Funktionen. **(4 Punkte)**

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $x, y : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare vektorwertige Funktionen.

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung genannte Produktregel für das Skalarprodukt

$$\langle x(t), y(t)\rangle' = \langle x'(t), y(t)\rangle + \langle x(t), y'(t)\rangle.$$

(b) Zeigen Sie, dass aus $\|x(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ folgt:

$$x'(t) \perp x(t) \quad \text{für alle} \quad t \in I.$$

(c) Berechnen Sie die Ableitung der reellwertigen Funktion

$$\|x\| : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|x(t)\|.$$

Hinweis zu (b): Berechnen Sie die Ableitung von $\|x(t)\|^2$.

Aufgabe 2. Vektorwertige Funktion. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die vektorwertige Funktion von zwei Variablen

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y) \mapsto F(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

sowie die Funktionen $\varphi_1(t) = \cos t$ und $\varphi_2(t) = \sin t$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_F(x, y)$ sowie ihren Rang in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$$

(b1) durch Einsetzen der Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ in die Abbildungsvorschrift $(*)$;

(b2) mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen verallgemeinerten Kettenregel.

Aufgabe 3. Differentialgleichungen. **(4 Punkte)**

(a) Finden Sie mindestens drei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$0 = \big(u \cdot u'\big)^2 - \big(1 + u^2\big) \cdot \big(v'\big)^2$$

mit den Anfangswerten $u(0) = 0$ und $v(0) = 1$.

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung für folgendes Differentialgleichungssystem:

$$0 = u' - u$$
$$0 = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Abgabe der Lösungen bis **Donnerstag**, den 25.10.2012 in der Übung.