Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dr. Michael Wiemeler

**Differentialgeometrie** **Fachrichtung Geodäsie**

**Übungsblatt 4** **Wintersemester 2012/13**

---

**Aufgabe 1. Variation der logarithmischen Spirale.** **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Kurve mit der Parametrisierung

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t, \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t, \mathrm{e}^{-t}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $x$ endliche Länge hat und geben Sie diese Länge $L(x)$ an.

(b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von $x$.

**Aufgabe 2. Krümmung und Torsion.** **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Kurve mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, 2 - \cosh t, \mathrm{e}^t).$$

(a) Zeigen Sie, dass $x$ regulär ist.

(b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von $x$.

(c) Zeigen Sie, dass für $t \to \infty$ sowohl die Krümmung als auch die Torsion gegen Null konvergieren.

**Aufgabe 3. Hyperbolische Schraubenlinie.** **(4 Punkte)**

Die Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cosh t, \sinh t, t),$$

heißt *hyperbolische Schraubenlinie.*

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve $x$ sowie deren Krümmung $\kappa(s)$ und Torsion $\tau(s)$ als Funktion des Bogenlängenparameters $s$.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve

$$y : [1, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \ln t, \frac{1}{\sqrt{2}t}\right),$$

durch eine (geeignete) euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie $x$ abgebildet werden kann.

---

**Abgabe** der Lösungen bis **Donnerstag**, den 15.11.2012 in der Übung.