Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dr. Michael Wiemeler

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 9 **Wintersemester 2012/13**

Aufgabe 1. Orthogonaltrajektorien **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Kegelfläche mit der Parameterdarstellung

$$x : [0, 2\pi) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad x(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^2 \cos u^1 \\ u^2(1 + \sin u^1) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die ersten Fundamentalgrößen von x, und untersuchen Sie, ob x singuläre Punkte hat.

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der u^2-Parameterlinien von x.

Aufgabe 2. Drehflächen. **(4 Punkte)**

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche, die durch Drehung der Kurve c um die x_3-Achse entsteht (vgl. Aufgabe 3 auf Übungsblatt 7).

(a) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der Drehfläche x.

(b) Berechnen Sie hiermit die ersten Fundamentalgrößen des Rotationstorus' $(0 < r < a)$

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1(a + r \cos u^2), \sin u^1(a + r \cos u^2), r \sin u^2).$$

Aufgabe 3. Satz von Pappus. **(4 Punkte)**

Nun sei $c : (0, L) \to \mathbb{R}^3$, $c(s) := (c_1(s), 0, c_3(s))$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte* Kurve mit $c_1(s) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times (0, L) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche $\mathcal{F}$, die entsteht, wenn die Kurve c um die x_3-Achse gedreht wird.

(a) Für $s \in (0, L)$ sei $\rho(s)$ der Abstand von $c(s)$ zur x_3-Achse. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_0^L \rho(s)\, ds.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rotationstorus' $(0 < r < a)$

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1(a + r \cos u^2), \sin u^1(a + r \cos u^2), r \sin u^2).$$

Abgabe der Lösungen bis **Donnerstag**, den 20.12.2012 in der Übung.