

Aufgabe 1. Geodätische Parallelkoordinaten.

(4 Punkte)

Gegeben sei die Fläche mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\sqrt{1 + (u^1)^2} \cos u^2, \sqrt{1 + (u^1)^2} \sin u^2, \operatorname{arsinh} u^1).$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Fläche nach geodätischen Parallelkoordinaten parametrisiert ist.
- (b) Begründen Sie, ob es sich um eine Parametrisierung nach Fermi-Koordinaten handelt.
- (c) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der Fläche.
- (d) Berechnen Sie die Gaußkrümmung der Fläche.

Hinweis: arsinh bezeichnet die Umkehrfunktion von \sinh und es gilt

$$\operatorname{arsinh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Aufgabe 2. Längentreue Abbildung.

(4 Punkte)

Gegeben seien zwei Flächen \mathcal{F} und $\overline{\mathcal{F}}$ mit den Parametrisierungen

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) &\mapsto (\cos u^1 \cosh u^2, \sin u^1 \cosh u^2, u^2) \quad \text{und} \\ \bar{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) &\mapsto (\cos u^1 \sinh u^2, \sin u^1 \sinh u^2, u^1). \end{aligned}$$

- (a) Begründen Sie, weshalb es eine längentreue Abbildung $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ gibt.
- (b) Zeigen Sie, dass es sich bei \bar{x} um eine Umparametrisierung der bekannten Wendelfläche

$$y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (v^1, v^2) \mapsto y(v^1, v^2) = (v^2 \cos v^1, v^2 \sin v^1, v^1)$$

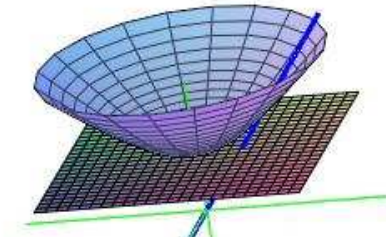
handelt.

Aufgabe 3. Stereographische Projektion.

(4 Punkte)

Gegeben sei die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \sinh u^2, \sin u^1 \sinh u^2, \cosh u^2).$$



Die *stereographische Projektion* ordnet jedem Punkt p auf x genau einen Punkt $\Phi(p)$ in der Ebene $E = \{(u^1, u^2, 1) \in \mathbb{R}^3 : u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}$ zu: $\Phi(p)$ ist der Schnittpunkt der Geraden durch p und den Ursprung $o = (0, 0, 0)$ mit E .

- Geben Sie wie in der Vorlesung die Parametrisierung $\bar{x} = \Phi \circ x$ des Bildes von x unter der stereographischen Projektion an.
- Ist Φ eine konforme Abbildung?