

# Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie

## Übungsblatt 8

### Hausaufgaben

#### Aufgabe 1 (Wendelfläche)

Für  $a > 0$  sei das parametrisierte Flächenstück  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), au^1)$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass  $x$  regulär ist.
- Zeigen Sie, dass  $x$  eine Regelfläche ist.
- Berechnen Sie die Parameterlinien  $c_{u^1}$  und  $c_{u^2}$  von  $x$ .
- Berechnen Sie die Krümmung von  $c_{u^1}$  und  $c_{u^2}$  und die Torsion von  $c_{u^1}$ . Um welche Kurven handelt es sich hier und warum?

#### Aufgabe 2 (Flächenstücke und Tangentialebene)

Für  $a \geq 0$  sei das parametrisierte Flächenstück  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto ((a + \cos(u^2)) \cos(u^1), (a + \cos(u^2)) \sin(u^1), \sin(u^2))$$

gegeben.

- Welche Punkte von  $x$  sind (in Abhängigkeit von  $a$ ) regulär? Für welche  $a$  sind alle Punkte von  $x$  regulär?
- Skizzieren sie die Flächenstücke  $x$  für die Parameter  $a = 0, 1, 2$ .
- Sei nun  $a = 2$ . Bestimmen Sie die Parameterlinien von  $x$  und überprüfen Sie, ob es sich um ebene Kurven handelt oder nicht.
- Bestimmen Sie die Tangentialebene von  $x$  für  $a = 2$  im Punkt  $x(0, \pi/2)$ .

## Präsenzaufgaben

### Aufgabe 3 (Sattelfläche)

Das parametrisierte Flächenstück  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , das durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1 \cdot u^2)$$

gegeben ist, heißt *Sattelfläche*.

- Zeigen Sie, dass  $x$  regulär in allen Punkten  $x(u)$  ist. Ein regulär parametrisiertes Flächenstück nennen wir *Fläche*.
- Bestimmen Sie die Parameterlinien  $c_{u^1}$  und  $c_{u^2}$  und berechnen Sie deren Krümmungen. Um welche Kurven handelt es sich?
- Bestimmen Sie die Tangentialebene von  $x$  in jedem Punkt  $x(u)$ .
- Was muss überprüft werden, um zu zeigen, dass  $x$  eine Regelfläche ist? Zeigen Sie, dass  $x$  eine Regelfläche ist.
- Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von  $x$ , in dem Sie eine glatte Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  finden, so dass

$$(u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

eine Parametrisierung der Fläche  $x$  ist.