

## §2.3 Implizite Flächendarstellungen

Dr. Gabriele Link

## Satz von der impliziten Funktion

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen, und  $h : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto h(x, y)$  eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Gilt für  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in U$  und  $\hat{y} \in I$

$$h(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \text{und} \quad h_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial h}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0,$$

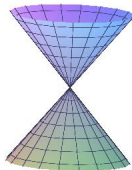
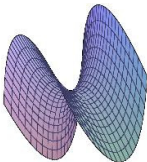
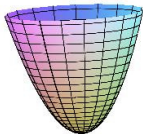
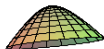
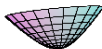
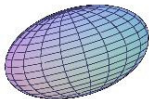
so existieren offene Umgebungen  $W \subseteq U$  von  $\hat{x}$ ,  $J \subseteq I$  von  $\hat{y}$  und genau eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion  $g : W \rightarrow J$

$$\text{mit } g(\hat{x}) = \hat{y} \quad \text{und} \quad h(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in W;$$

für jedes feste  $x \in W$  ist  $g(x) \in J$  die einzige Lösung in  $J$  mit  $h(x, g(x)) = 0$ . Weiter gilt für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$

$$\text{grad } g(x) = -\frac{1}{h_y(x, g(x))} \cdot \left( h_{x_1}(x, g(x)), \dots, h_{x_n}(x, g(x)) \right)^\top.$$

## §2.3 Implizite Flächendarstellungen



## §2.3 Implizite Flächendarstellungen

### Satz von der Umkehrfunktion

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar mit Jacobimatrix  $J_F$ , und  $\hat{x} \in U$  mit  $\text{Rang}(J_F(\hat{x})) = n$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $W \subseteq U$  von  $\hat{x}$  sodass

$$F|_W : W \rightarrow F(W)$$

bijektiv ist. Die Umkehrabbildung  $G = (F|_W)^{-1} : F(W) \rightarrow W$  ist  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar, und im Fall  $m = n$  gilt

$$J_G(F(x)) = (J_F(x))^{-1}, \quad x \in W.$$

### Bemerkungen

- Notwendig ist also insbesondere die Bedingung  $m \geq n$ .
- Es muss keine **globale** Umkehrfunktion existieren.