§3.2 **Gebietsintegrale**

Dr. Gabriele Link

Einleitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$, eine **reellwertige Funktion** von zwei Veränderlichen.

Ziel

Erklärung des **Gebietsintegrals** oder auch **Doppelintegrals**

$$\iint_D f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2),$$

das das Volumen des Bereichs zwischen dem Graphen von f und der (x_1, x_2)-Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben soll.

Zunächst

Betrachte als Definitionsbereich D nur **beschränkte Rechtecke** $R = I \times J$ mit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle der Längen $|I|$, $|J|$.

Treppenfunktionen

Definition

Ist $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ ein **beschränktes** Rechteck, so heißt eine Funktion $\varphi : I \times J \to \mathbb{R}$ **Treppenfunktion**, falls es Zerlegungen

$$I = \bigcup_{i=1}^{k} I_i \qquad \text{und} \qquad J = \bigcup_{j=1}^{l} J_j$$

von I und J in paarweise disjunkte Teilintervalle I_i bzw. J_j gibt, sodass $\varphi\big|_{I_i \times J_j}$ eine konstante Funktion mit Wert $c_{ij} \in \mathbb{R}$ ist.
In diesem Fall setzt man

$$\iint_R \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(x_1, x_2) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_{ij} \cdot |I_i| \cdot |J_j|.$$

Nullmengen

Bemerkung

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele oder abzählbar unendlich viele beschränkte Rechtecke R_k, $k = 1, 2, \ldots$, gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_k R_k \qquad \text{und} \qquad \sum_k |R_k| \leq \varepsilon.$$

Man sagt, eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ gilt für **fast alle** x (oder **fast überall (f.ü.)**), wenn die Menge $\{x : \mathcal{A}(x) \text{ gilt nicht}\}$ eine Nullmenge ist.

Beispiele

- Ränder von Rechtecken
- Graphen von stetigen Funktionen einer Veränderlichen

Entscheidende Aussage für Lebesgue Integration

Lemma

Ist (φ_n) eine Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen auf dem beschränkten Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$, die fast überall monoton fallend gegen Null konvergiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R \varphi_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0.$$

Treppenfunktionen auf unbeschränkten Rechtecken

Eine Funktion $\varphi : R \to \mathbb{R}$ auf einem **unbeschränkten** Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es ein beschränktes Rechteck $R' \subseteq R$ gibt, sodass $\varphi\big|_{R'}$ eine Treppenfunktion ist, und $\varphi(x) = 0$ gilt für $x \in R \backslash R'$; man definiert in diesem Fall

$$\iint_R \varphi(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) := \iint_{R'} \varphi(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Lebesgue Integrierbarkeit auf Rechtecken

Definition

Ist $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Rechteck, so bezeichnet $L^+(R)$ die Menge aller Funktionen $f : R \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine monoton wachsende Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf R (d.h. für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ für fast alle $x \in R$), die fast überall gegen f konvergiert (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in R$).
2. Die Folge der Integrale $\iint_R \varphi_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2)$ ist konvergent.

Für $f \in L^+(R)$ definiert man das **Lebegue Integral** von f über R durch

$$\iint_R f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) := \lim_{n\to\infty} \iint_R \varphi_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Lebesgue Integrierbarkeit auf Rechtecken

Definition (Fortsetzung)

Aus $L^+(R)$ konstruiert man die größere Menge

$$L(R) := \{f : R \to \mathbb{R} : \exists\, f_1, f_2 \in L^+(R) \quad \text{sodass} \quad f = f_1 - f_2\};$$

diese heißt Menge der **Lebegue integrierbaren Funktion** über R.
Für $f \in L(R)$ setzt man naheliegenderweise

$$\iint_R f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) := \iint_R f_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) - \iint_R f_2(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Lebesgue Integrierbarkeit auf beliebigen Mengen

Definition

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine **beliebige Menge**, so heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **integrierbar** auf D, falls die durch Null fortgesetzte Funktion

$$f^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\iint_D f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(x_1, x_2) := \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Lebesgue Integrierbarkeit auf beliebigen Mengen

Definition (Fortsetzung)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **messbar**, falls die **charakteristische Funktion**

$$\chi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \end{cases}$$

integrierbar ist; $|D| := \iint_D 1 \, \mathrm{d}(x_1, x_2)$ heißt **Flächeninhalt/Maß**.

Satz

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar, $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und fast überall stetig, so ist f integrierbar.

Folgerung

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf D integrierbar.

Der Satz von Fubini

Satz

Ist $R = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $f \in L(R)$, so existieren die Funktionen

$$g(y) := \int_I f(x_1, y)\,\mathrm{d}x_1 \quad \text{fast überall auf } J,$$

$$h(x) := \int_J f(x, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \quad \text{fast überall auf } I.$$

Weiter gilt $g \in L(J)$, $h \in L(I)$ und

$$\iint_R f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_J g(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint_R f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_I h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der Satz von Fubini

Folgerung

Sind $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für alle $x \in (a, b)$, und

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, \varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)\},$$

so gilt

$$\iint_D f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Analog folgt für

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_2 \leq b, \varphi_1(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2)\},$$

$$\iint_D f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2.$$

Substitutionsregel

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar, und $G : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, die außerhalb einer Nullmenge von D injektiv ist und $\det J_G \neq 0$ erfüllt. Eine Funktion $f : G(D) \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die auf D definierte Funktion

$$x \mapsto f\big(G(x)\big) \cdot |\det J_G(x)|$$

integrierbar ist; in diesem Fall gilt die **Transformationsformel**

$$\iint_{G(D)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}(y_1, y_2)$$
$$= \iint_D f\big(G(x_1, x_2)\big) \cdot |\det J_G(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$