Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie — **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 3 — **25.10.2019**

Aufgabe 1 (*Zykloide*) *(6 Punkte)*
Rollt ein Kreis K vom Radius $r > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine ebene Kurve, die *Zykloide* genannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), 0)$$

für eine solche Zykloide, indem Sie als Gerade die x_1-Achse, einen in der (x_1, x_2)-Ebene liegenden Kreis und als Startpunkt $x(0)$ den Ursprung wählen. Der Kreis soll sich dabei um eine ganze Umdrehung bewegen.

b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor der Zykloide x in jedem Punkt $x(t)$ und berechnen Sie die Länge von x in Abhängigkeit von r.

Hinweise: Sollten Sie in Teil a) zu keinem Ergebnis gelangt sein, dürfen Sie für die Bearbeitung von Aufgabenteil b) die folgende parametrisierte Kurve verwenden:

$$x : [0, 2\pi] \to R^3, t \mapsto (1 + t - \sin(t) - \cos(t), 1 - t + \sin(t) + \cos(t), 0)$$

Sie können außerdem die Identität $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ verwenden.

Aufgabe 2 (*Umparametrisierungen*) *(6 Punkte)*
Sei die parametrisierte Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $t \mapsto (\sin(t), 1, t^2)$.

a) Zeigen Sie, dass x regulär ist und bestimmen Sie die Tangente im Punkt $t_0 = 0$.

b) Welche der folgenden Kurven sind Umparametrisierung von x und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

i) $\bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto (\sin(s^3), 1, s^6)$

ii) $\hat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto (-\sin(s), s^2, 1)$

iii) $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto (\sin(s), 1, s^2 + 4\pi(s + \pi))$

Aufgabe 3 (*Reguläre Funktionen und Tangenten*) *(6 Punkte)*
Überprüfen Sie für die folgenden drei vektorwertigen Funktionen, ob diese glatt sind, und bestimmen Sie die regulären Punkte dieser Funktionen. Berechnen Sie außerdem die Tangente in allen regulären Punkten.

a) $x : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t), \cosh(t), 4 + \sin(t))$

b) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (e^t \sin(t), e^t \cos(t), e^t)$

c) $x : [1, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\ln(t), \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{t\sqrt{2}})$

Abgabe am 04.11.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.